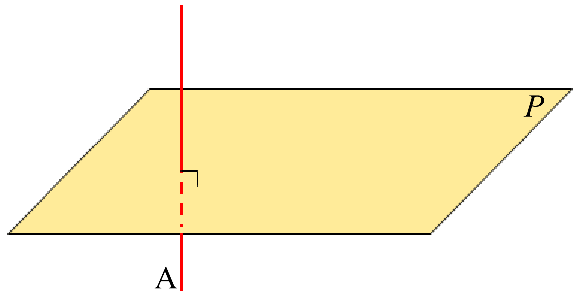
PROPRIÉTÉ
Soit P un plan et A un point de l'espace.
Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à P.

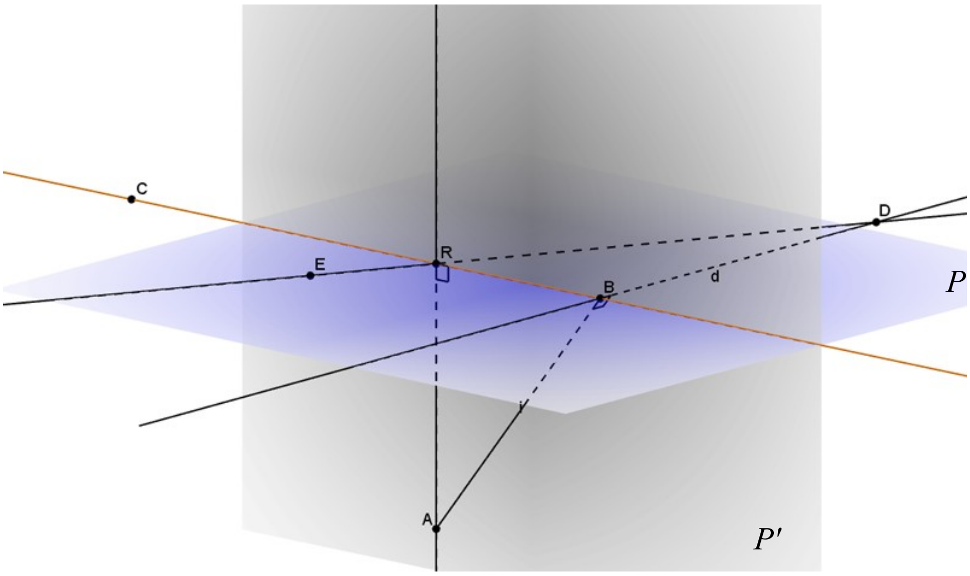


Démonstration :

Existence

Admise mais possible.
Il faudrait montrer d'abord que « Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan orthogonal à une droite donnée »…
Voir http://maths.deboeck.com/public/modele/maths/content/files/cqfd56coweb/CQFD56CO_chap09_RB.pdf (démonstration 2.a)

Si A $\notin P$:



Soit d une droite incluse dans P.
On note P' l'unique plan orthogonal à d et passant par A.
On note B l'intersection de d et P'.
Alors : (AB) $\perp$ d et (BC) $\perp$ d.
On trace Δ la droite perpendiculaire à (BC) passant par A.
Montrons que Δ est orthogonale à P.

On note R l'intersection de Δ et (BC).
Soit E $\in P$ tel que (RE) et d sont sécantes. Montrons que (AR) $\perp$ (RE).
On note D l'intersection de (RE) et d.
ABD est rectangle en B donc $AD^2 = AB^2 + BD^2$.
ARB est rectangle en R donc $AB^2 = AR^2 + RB^2$.
RBD est rectangle en B donc $RD^2 = RB^2 + BD^2$.
Donc : $AD^2 = AR^2 + RB^2 + BD^2$
$AD^2 = AR^2 + RD^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ARD est rectangle en R, d'où (AR) $\perp$ (RD) *ie* (AR) $\perp$ (RE).

Si A $\in P$:

Voir http://maths.deboeck.com/public/modele/maths/content/files/cqfd56coweb/CQFD56CO_chap09_RB.pdf (démonstration 2.b)

Unicité

Supposons qu'il existe deux droites distinctes, d et d', passants par A et orthogonales à P.
Alors d et d' sont coplanaires par construction (un point en commun et deux droites sécantes).

Si A $\notin P$:

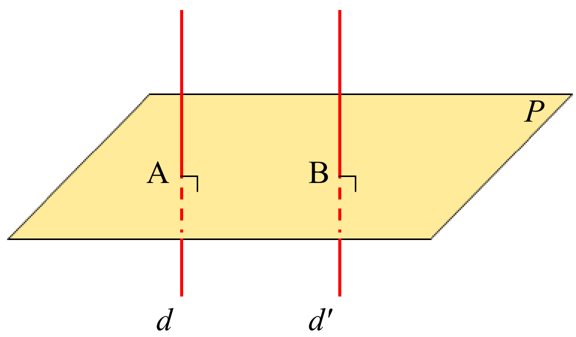
On note B et C leur point d'intersection avec P, donc $d = (AB)$ et $d' = (AC)$.
d est orthogonale à P donc (AB) est perpendiculaire à (BC).
d' est orthogonale à P donc (AC) est perpendiculaire à (BC).
Or, deux droites coplanaires perpendiculaires à une même troisième sont parallèles, donc $d \parallel d'$.
Mais d et d' ont le point A en commun, elles sont donc confondues : $d = d'$.

Si A $\in P$:

Soit B un point de P.
d est orthogonale à P donc d est perpendiculaire à (AB).
d' est orthogonale à P donc d' est perpendiculaire à (AB).
Or, deux droites coplanaires perpendiculaires à une même troisième sont parallèles, donc $d \parallel d'$.
Mais d et d' ont le point A en commun, elles sont donc confondues : $d = d'$.

PROPRIÉTÉ

Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.



Démonstration **1** :

Soient d et d' deux droites (distinctes) orthogonales à un même plan P.
On note A (resp. B) l'intersection de d (resp. d') et de P.

On note d'' la parallèle à d passant par B.
d est orthogonale à deux droites sécantes de P, que l'on note d_1 et d_2.
Alors, par construction de d'', on a : d'' orthogonale à d_1 et d_2
d'où d'' orthogonale à P.
Or, il n'existe une unique droite passant par B et orthogonale à P, donc $d'' = d'$.
Par conséquent : $d \parallel d'$.

Démonstration **2** :

Soient d et d' deux droites (distinctes) orthogonales à un même plan P.
Montrons par l'absurde que les deux droites sont nécessairement coplanaires et non sécantes (et qu'elles sont donc parallèles).

On note A (resp. B) l'intersection de d (resp. d') et de P.

Supposons *par l'absurde* que d et d' ne sont pas coplanaires.
Alors il existe un point C de d' qui n'appartient pas au plan formé par d et (AB).
On note d'' la parallèle à d passant par C.
d est orthogonale à deux droites sécantes de P, que l'on note d_1 et d_2.
Alors, par construction de d'', on a : d'' orthogonale à d_1 et d_2
d'où d'' orthogonale à P.
Or, il n'existe une unique droite passant par C et orthogonale à P, donc $d'' = d'$.
Par conséquent : $d // d'$ et alors d et d' sont coplanaires. *(contradiction)*

Supposons *par l'absurde* que d et d' sont sécantes en un point E.
Il n'existe qu'une seule droite orthogonale à P passant par E.
Or d et d' sont orthogonales à P et passent par E : donc $d = d'$. *(contradiction)*

Démonstration **3** :

Cette démo. suppose connu la propriété suivante :
« si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre »

Soient d et d' deux droites (distinctes) orthogonales à un même plan P.
Montrons par l'absurde que les deux droites sont parallèles.

On note A (resp. B) l'intersection de d (resp. d') et de P.

Supposons *par l'absurde* que d et d' ne sont pas parallèles.
On note d'' la parallèle à d passant par B : $d'' // d$ et $d'' \neq d'$.
Or, si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre
donc d'' est orthogonale à P.
Les droites d et d'' sont donc orthogonales à P et passent par B,
d'où $d = d''$. *(contradiction)*