# INTRODUCTION HISTORIQUE AUX NOMBRES COMPLEXES

Au XVIe siècle, les algébristes italiens apprennent à résoudre les équations du troisième degré, en les ramenant à des équations du second degré dont la résolution est connue depuis le IXe siècle grâce aux mathématiciens arabes. Au cours de cette recherche vont apparaître les ***nombres complexes***.

**DÉFINITION** **Racine cubique d'un réel**

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\sqrt[3]{a}$ et on appelle ***racine cubique de a*** l'unique réel $x$ tel que $x^3 = a$ .

La racine cubique, contrairement à la racine carrée, est définie pour tout réel car la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et varie de $-\infty$ à $+\infty$ .
Par exemple : $\sqrt[3]{-8} = -2$ . En effet $(-2)^3 = -8$ .

On cherche donc à résoudre une équation du type $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$ (où $a \neq 0$ ).

## A. Simplification du problème

**1.** Expliquer pourquoi on peut toujours se ramener au cas $a = 1$ .

**2.** Montrer qu'il suffit de s'intéresser à la résolution des équations du type $\mathrm{X}^3 - p\mathrm{X} - q = 0$ .

*Aide : poser* $x = \mathrm{X} - \frac{b}{3}$ .

## B. La méthode de Tartaglia-Cardan sur un exemple

On souhaite résoudre l'équation (E) : $x^3 - 6x - 20 = 0$ , c'est-à-dire $x^3 = 6x + 20$ .
Supposons que $x$ est une solution de cette équation.

**1.** $x$ peut s'écrire sous la forme $u + v$ .
Montrer qu'on a alors : $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 6(u + v) + 20$ . (*)

**2.** Afin de simplifier cette égalité, on souhaite que : $uv = 2$ . Ainsi, l'égalité (*) s'écrirait $u^3 + v^3 = 20$ .
On pose $\mathrm{U} = u^3$ et $\mathrm{V} = v^3$ .

- **a)** Montrer que $\mathrm{U} + \mathrm{V} = 20$ et $\mathrm{UV} = 8$ .
- **b)** Montrer qu'alors $\mathrm{U}$ et $\mathrm{V}$ sont solutions de l'équation du second degré $\mathrm{X}^2 - 20\mathrm{X} + 8 = 0$ .
- **c)** Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, et en déduire des valeurs de $\mathrm{U}$ et $\mathrm{V}$ .
- **d)** En déduire les valeurs de $u$ et $v$ , et celle de $x$ .
- **e)** En déduire qu'une solution de (E) est : $\sqrt[3]{10 + 2\sqrt{23}} + \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{23}}$ .

**3.** Étudier la fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 - 6x + 20$ sur $\mathbb{R}$.
Combien l'équation (E) a-t-elle de solutions ?

**4.** Conclure.

## C. Des nombres impossibles : le génie de Bombelli

La méthode de Tartaglia-Cardan conduit cependant, dans certains cas, à des difficultés que Bombelli (1526-1572) va essayer de surmonter. Il publie en 1572 dans *L'Algebra* l'exemple suivant.

On souhaite résoudre l'équation (E') : $x^3=15x+4$ .

**1.** Étudier la fonction $g$ définie par $g(x)=x^3-15x-4$ sur $\mathbb{R}$.
Combien l'équation (E') a-t-elle de solutions ?

**2.** En procédant comme dans la partie B, montrer que $\mathrm{U}$ et $\mathrm{V}$ sont solutions de l'équation :

$$(\mathrm{X}-2)^2+121=0\ .$$

Cette équation a-t-elle des solutions réelles ?

**3.** Devant cette difficulté, Bombelli décida de faire comme si $-121$ était le carré d'un nombre imaginaire qui s'écrirait $11\sqrt{-1}$ . Il appelait $\sqrt{-1}$ « *piu di meno* ».
Grâce à ce stratagème, il trouva les solutions de (E') :

- **a)** Déterminer $\mathrm{U}$ et $\mathrm{V}$ .
- **b)** On avait posé $\mathrm{U}=u^3$ et $\mathrm{V}=v^3$ . Mais la racine cubique de $\mathrm{U}$ ou de $\mathrm{V}$ a-t-elle un sens ici ?
- **c)** Calculer $(2+\sqrt{-1})^3$ et $(2-\sqrt{-1})^3$ .
- **d)** En déduire $u$ et $v$ , puis $x$ . En déduire que 4 est une solution de (E').

**4.** Grâce à la question précédente, factoriser $x^3-15x-4$ .
En déduire les autres solutions de (E').

---

Pour résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, Bombelli a utilisé un nombre qui n'est pas réel, en lui appliquant les propriétés des réels. Mais sa méthode fonctionne bien, elle permet effectivement (exemple à l'appui) de trouver les solutions…
La méthode de Cardan ne pouvait pas s'appliquer, à moins d'accepter de quitter temporairement le domaine du possible et de travailler sur des nombres imaginaires utilisant des racines carrées de nombres négatifs. Comme si ***pour résoudre ce problème, il suffisait de s'en extraire***…

---