Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g un fonction dérivable sur l'intervalle J. La fonction $g\circ f$ est une fonction dérivable sur I et pour tout nombre réel a, on a l'égalité :

$$\big[g\circ f\big]'(a) = f'(a)\times g'\big[f(a)\big]$$

Démonstration :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g un fonction dérivable sur l'intervalle J. On considère un nombre réel $a\in I$ tel que :

$f(a)=b \quad ; \quad b\in J.$

On considère la fonction ε définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} - g'(b) & \text{pour } x\neq b \\ \varepsilon(x) = 0 & \text{pour } x=b \end{cases}$$

On effectue les deux remarques préliminaires :

- On a la limite suivante :

  $$\lim_{\substack{x\mapsto b\\ x>b}} \varepsilon(x) = \lim_{\substack{x\mapsto b\\ x>b}} \left[\frac{g(x)-g(b)}{x-b} - g'(b)\right] = \lim_{\substack{x\mapsto b\\ x>b}} \left[\frac{g(x)-g(b)}{x-b}\right] - g'(b)$$

  La fonction g est dérivable en b :

  $$= g'(b) - g'(b) = 0$$

  De même, on obtiendra la limite : $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto b\\ x<b}} \varepsilon(x) = 0$

  Ainsi, on obtient les égalités : $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto b\\ x<b}} \varepsilon(x) = \lim_{\substack{x\mapsto b\\ x>b}} \varepsilon(x) = \varepsilon(b)$

  On en déduit que la fonction ε est continue en 0.

  La fonction f étant dérivable en a, on en déduit que la fonction composée $\varepsilon\circ f$ est continue en a. On en déduit la limite suivante :

  $$\lim_{x\mapsto a} \big(\varepsilon\circ f\big)(x) = \varepsilon\big[f(a)\big] = \varepsilon(b) = 0$$

- Etudions une expression de $g(x)-g(b)$ par la disjonction de cas suivante sur la valeur de x :
  - Si $x\in J$ et $x\neq b$: $\quad \varepsilon(x) = \dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} - g'(b) \quad \Longrightarrow \quad g(x)-g(b) = \big[\varepsilon(x)+g'(b)\big]\cdot(x-b)$
  - Si $x=b$:
    - $g(x)-g(b) = g(b)-g(b) = 0$
    - $\big[\varepsilon(x)+g'(b)\big]\cdot(x-b) = \big[\varepsilon(b)+g'(b)\big]\cdot(b-b) = \big[0+g'(b)\big]\times 0 = 0$

  Ainsi, on en déduit que pour tout nombre réel $x\in J$, on a :

  $$g(x)-g(b) = \big[\varepsilon(x)+g'(b)\big]\cdot(x-b)$$

  En particulier, on pourra utiliser l'égalité suivante pour tout $x\in I$:

  $$g\big[f(x)\big]-g(b) = \big[\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b)\big]\cdot\big[f(x)-b\big]$$

Etudions le quotient suivant :

$$\frac{\big(g\circ f\big)(x)-\big(g\circ f\big)(a)}{x-a} = \frac{g\big[f(x)\big]-g\big[f(a)\big]}{x-a} = \frac{g\big[f(x)\big]-g(b)}{x-a} = \frac{\big[\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b)\big]\cdot\big[f(x)-b\big]}{x-a}$$

$$= \big[\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b)\big]\cdot\frac{f(x)-b}{x-a} = \Big[\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b)\Big]\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

On a les deux limites suivantes :

- La fonction $\varepsilon\circ f$ est continue en a :

  $$\lim_{x\mapsto a}\Big[\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b)\Big] = \lim_{x\mapsto a}\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b) = 0+g'(b) = g'(b) = g'\big[f(a)\big]$$

- La fonction f étant dérivable en a, on a : $\displaystyle\lim_{x\mapsto a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto a}\frac{\big(g\circ f\big)(x)-\big(g\circ f\big)(a)}{x-a} = \lim_{x\mapsto a}\big[\varepsilon\big[f(x)\big]+g'(b)\big]\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'\big[f(a)\big]\times f'(a)$$

Preuve : *(avec le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable)*

Soit f une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(x)$. Montrons que le nombre dérivée de la fonction $(g\circ f)$ en a a pour valeur :

$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\cdot g'\big[f(a)\big]$$

- **Utilisation de la dérivabilité de f et de g :**

La fonction f étant dérivable en a, il existe une fonction ε telle que pour tout h tel que $a+h\in\mathcal{D}_f$:

$$f(a+h) = f(a) + h\cdot f'(a) + h\cdot\varepsilon(h) \qquad \text{où } \lim_{h\mapsto 0}\varepsilon(h) = 0$$

La fonction g étant dérivable en $f(a)$, il existe une fonction ε' telle que pour tout k tel que $f(a)+k\in\mathcal{D}_g$:

$$g\big[f(a)+k\big] = g\big[f(a)\big] + k\cdot g'\big[f(a)\big] + k\cdot\varepsilon'(k) \qquad \text{où } \lim_{h\mapsto 0}\varepsilon'(h) = 0$$

- **Identification de limites tendant vers 0 :**

On a l'égalité suivante :

$$f(a+h) = f(a) + h\cdot f'(a) + h\cdot\varepsilon(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h\cdot f'(a) + h\cdot\varepsilon(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]$$

On en déduit que la limite suivante : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} f(a+h) - f(a) = 0$

Ainsi, la différence a une valeur aussi proche de 0 que l'on souhaite pour des valeurs de h suffisamment proches de 0.

- **Substitution de variables :**

Remplaçons dans l'égalité toute valeur de k par $f(a+h)-f(a)$:

$$g\Big(f(a)+\big[f(a+h)-f(a)\big]\Big) = g\big(f(a)\big) + \big[f(a+h) - f(a)\big]\cdot g'\big(f(a)\big) + \big[f(a+h) - f(a)\big]\cdot\varepsilon'\big(f(a+h)-f(a)\big)$$

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + \big[f(a+h) - f(a)\big]\cdot g'\big(f(a)\big) + \big[f(a+h) - f(a)\big]\cdot\varepsilon'\big(f(a+h)-f(a)\big)$$

Utilisons l'égalité $f(a+h) - f(a) = h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]$:

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\cdot g'\big(f(a)\big) + h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\cdot\varepsilon'\Big(h\cdot\big[f'(a)+\varepsilon(h)\big]\Big)$$

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + h\cdot g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a) + h\cdot g'\big[\big(f(a)\big)\cdot\varepsilon(h) + h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\cdot\varepsilon'\Big(h\cdot\big[f'(a)+\varepsilon(h)\big]\Big)$$

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + h\cdot g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a) + h\cdot\Big[g'\big(f(a)\big)\cdot\varepsilon(h) + \big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\cdot\varepsilon'\Big(h\cdot\big[f'(a)+\varepsilon(h)\big]\Big)\Big]$$

Notons $\sigma(h) = g'\big(f(a)\big)\cdot\varepsilon(h) + \big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\cdot\varepsilon'\Big(h\cdot\big[f'(a)+\varepsilon(h)\big]\Big)$, on a l'égalité :

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + h\cdot g'\big[f(a)\big]\cdot f'(a) + h\cdot\sigma(h)$$

- **Identification du développement limité de $(g\circ f)$ en a :**

On a les limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big] = 0 \Longrightarrow \lim_{h\mapsto 0}\varepsilon'\Big(h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\Big) = 0 \\ \displaystyle\lim_{h\mapsto 0} f'(a)+\varepsilon(h) = f'(a)\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{h\mapsto 0}\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\cdot\varepsilon'\Big(h\cdot\big[f'(a) + \varepsilon(h)\big]\Big) = 0$$

$$\lim_{h\mapsto 0}\varepsilon(h) = 0 \Longrightarrow \lim_{h\mapsto 0} g'\big[f(a)\big]\cdot\varepsilon(h) = 0$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\sigma(h) = 0$

Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + h\cdot g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a) + h\cdot\sigma(h) \qquad \text{où } \lim_{h\mapsto 0}\sigma(h) = 0$$

On en déduit que la fonction $(g\circ f)$ est dérivable en a et admet pour nombre dérivée :

$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big)$$

