CALCULS DE DÉRIVÉES (PARTIE 2)

I. Racine carrée

PROPRIÉTÉ.

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=\sqrt{u(x)}$.

La fonction f est dérivable en tout réel x tel que $x \in \mathrm{I}$ et $u(x)\neq 0$:

Démonstration :

Soit x tel que $x \in \mathrm{I}$ et $u(x)\neq 0$. On a donc $u(x)>0$.
Soit h un réel non nul tel que $x+h \in \mathrm{I}$.
La fonction u est positive sur I donc $u(x+h)\geqslant 0$.
On a donc $\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}>0$ et :

$$\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}=\frac{\left(\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}\right)\left(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right)}{h\left(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right)}$$

$$=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}.$$

Or :

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ car $x \in \mathrm{I}$ et u est dérivable sur I
- u est dérivable en x donc u est continue en x, donc $\lim\limits_{h\to 0}u(x+h)=u(x)$

et alors $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$.

On a donc : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

II. Puissance

PROPRIÉTÉ.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=(u(x))^n$.

La fonction f est dérivable en tout réel x de I :

Démonstration : par récurrence sur n.

PROPRIÉTÉ.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que u ne s'annule pas sur I

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ avec $n<0$.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=(u(x))^n$.

Alors la fonction f est dérivable en tout réel x de I :

Démonstration :

$f(x)=(u(x))^n=(u(x))^{-m}$ avec $m=-n$ donc $m>0$.

D'après la propriété précédente :

x $\mapsto$ $(u(x))^m$ est dérivable et sa dérivée est $m\,u'(x)(u(x))^{m-1}$.

Donc $f(x)=\dfrac{1}{(u(x))^m}$ et alors :

$$\begin{aligned} f'(x)=\frac{-m\,u'(x)(u(x))^{m-1}}{((u(x))^m)^2} &= -m\,u'(x)\times(u(x))^{m-1-2m} \\ &= -m\,u'(x)\times(u(x))^{-m-1} \\ &= n\,u'(x)\times(u(x))^{n-1} \end{aligned}$$

III. Composée

III.1 Fonction affine

PROPRIÉTÉ.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels.

On note J l'intervalle formé de tous les réels x tels que $ax+b \in \mathrm{I}$.

La fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et sa dérivée est la fonction :

Démonstration : déjà vue dans les exercices du chapitre « calculs de dérivées (partie 1) »

III.2 Cas général

PROPRIÉTÉ.

Admis

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.

Soit g une fonction dérivable sur J.

La fonction $g \circ u : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

$$(g \circ u)' : x \mapsto u'(x) \times g'(u(x))$$

Remarque : propriété admise, mais démonstration accessible en Terminale S.
Voir sur mon site : www.mathemathieu.fr

IV. Fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

Démonstration : déjà faite dans l'exercice 65 p.184, traité au chapitre sur la continuité.
Sinon, on peut appliquer la propriété précédente, qui elle est admise.