CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

I. Définition et exemples 1

II. Théorème des valeurs intermédiaires 3

III. Les courbes monstres 5

I. Définition et exemples

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in \mathrm{I}$.

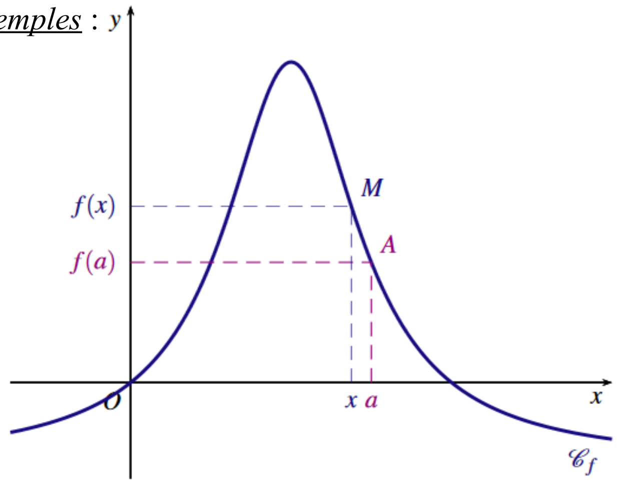
DÉFINITIONS.

On dit que f est continue en a lorsque :

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout réel de I .

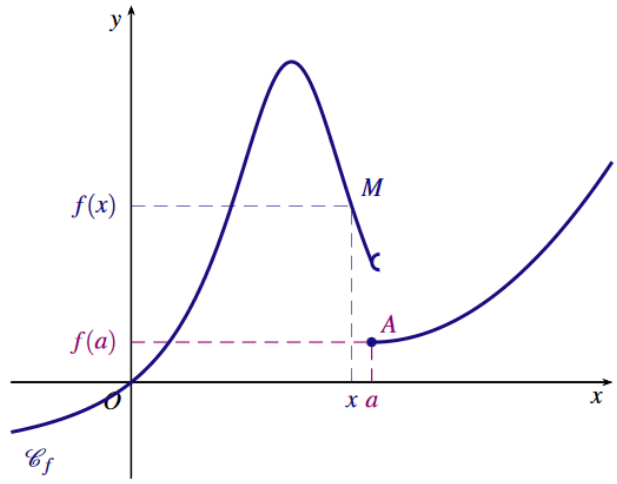
*Graphiquement, **la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle I peut être tracée** en un seul morceau sur I, **sans lever le crayon**.*

<u>*Exemples*</u> :



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.

La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.

Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

(source : http://yallouz.arie.free.fr)

PROPRIÉTÉS.

Les fonctions polynomiales, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, sinus, cosinus sont continues sur leur ensemble de définition.

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

THÉORÈME. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.	*Admis*

Démonstration : *(hors programme mais vraiment facile)*

f est dérivable en a donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

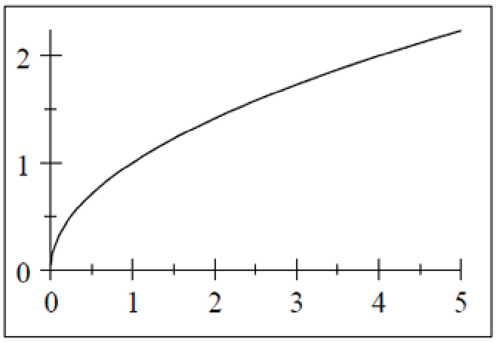
Pour tout $x\neq a$, on a : $f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)$.

Par produit de limites, on a alors : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)=f'(a)\times 0=0$

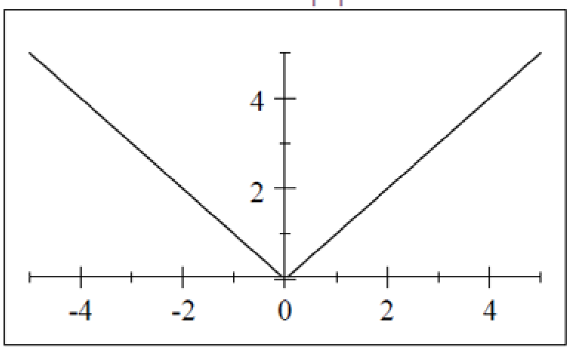
c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to a} f(x)-f(a)=0$ d'où $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Remarque : la réciproque est fausse.
Par exemple, les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continues en 0 mais non dérivable en 0.

$x \mapsto \sqrt{x}$



$x \mapsto |x|$



Convention dans un tableau de variations

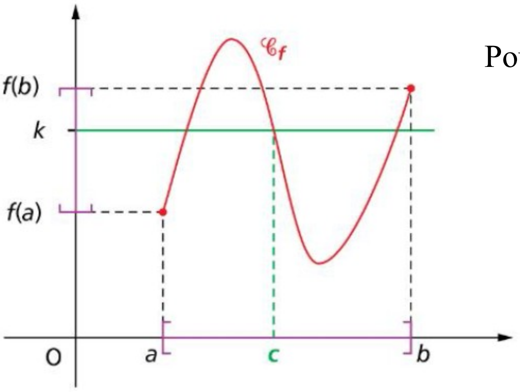
Une flèche dans un tableau de variations d'une fonction f indique :
- la stricte croissance ou la stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

Exemple 1 : Étudier la continuité sur ℝ de la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & \text{si } x\leqslant 1 \\ x^2-7x+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$.

Exemple 2 : Étudier la continuité sur ℝ de la fonction g définie par $g(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si } x\leqslant 1 \\ x^2+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$.

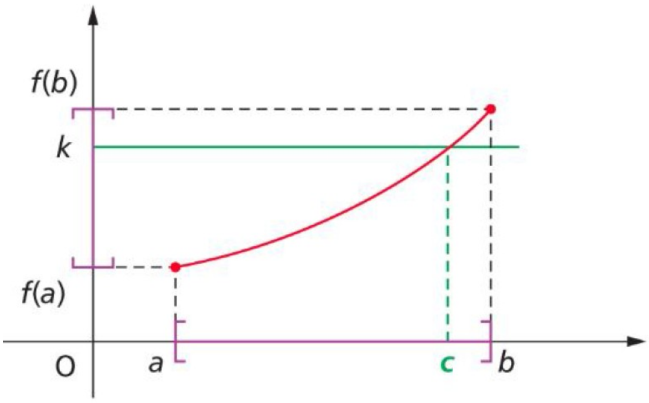
II. Théorème des valeurs intermédiaires

> THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES. (**TVI**)
>
> Soit f une fonction définie et <u>continue sur un intervalle I</u>. Soient a et b deux réels de I.
> Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:
> l'équation $f(x)=k$ admet <u>au moins</u> une solution dans $[a;b]$.



Pourquoi est-il nécessaire que f soit continue sur l'intervalle I ?

> THÉORÈME. (COROLLAIRE DU TVI)
>
> Soit f une fonction définie et <u>continue sur un intervalle I</u>, <u>strictement monotone sur I</u>.
>
> Soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:
>
> l'équation $f(x)=k$ admet <u>une unique</u> solution dans $[a;b]$



<u>Démonstration</u> :

L'existence d'une solution à l'équation $f(x)=k$ est assurée par le TVI.

Démontrons par l'absurde l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux réels distincts α et α' de l'intervalle [a ; b] solutions de l'équation $f(x)=k$.

Si α est le plus petit des deux réels, alors $\alpha<\alpha'$.

Or, f est strictement monotone sur I donc $f(\alpha)<f(\alpha')$ ou $f(\alpha)>f(\alpha')$.

Ceci est absurde puisque $f(\alpha)=f(\alpha')=k$.

Remarque importante : ces théorèmes s'appliquent aussi lorsque l'intervalle I est de la forme $[a;b[$; $]a;b]$; $]a;b[$; $[a;+\infty[$; $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.

Exemple :

On considère la fonction g définie sur ℝ par $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$.

1. Étudier les variations de g .

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution notée α.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

3. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

III. Les courbes monstres

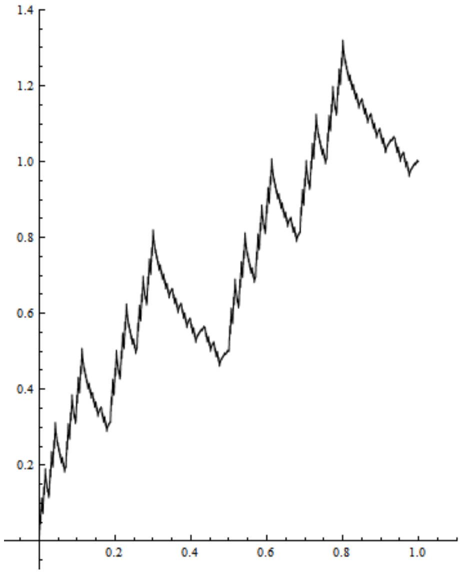
Il existe des **fonctions continues partout, mais dérivable nulle part**… Si si !

Elles sont apparues au XIXe siècle, et ont été loin de laisser indifférent : Poincaré les a qualifiées de "monstres" et Charles Hermite écrira en 1893 :

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ».

On les appelle plus affectueusement "pathologiques"…

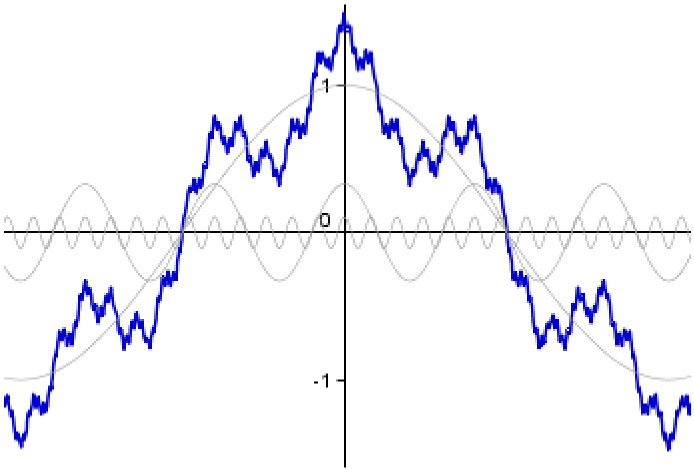
La toute première fonction de ce type est l'œuvre du mathématicien tchèque Bernard Bolzano, découverte en 1830. Il faudra tout de même attendre 1930 avant qu'elle ne soit publiée. Par sa construction, on peut l'identifier comme étant la première fractale de l'histoire !



Le 18 juillet 1872, le mathématicien Karl Weierstrass présente devant une foule médusée non pas une, toute une famille entière de fonctions continues dérivables nulle part ! Il en existait bien deux autres alors, mais n'étaient pas publiées (celle de Bolzano et celle de Cellérier, qui est un cas particulier de celle de Weierstrass).
Les courbes de Weierstrass sont données par la formule suivante :

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

Autrement dit, une somme de fonctions cosinus (toutes aussi continues et dérivables les unes que les autres, mais de plus en plus sinueuses et tassées), ce qui donne :

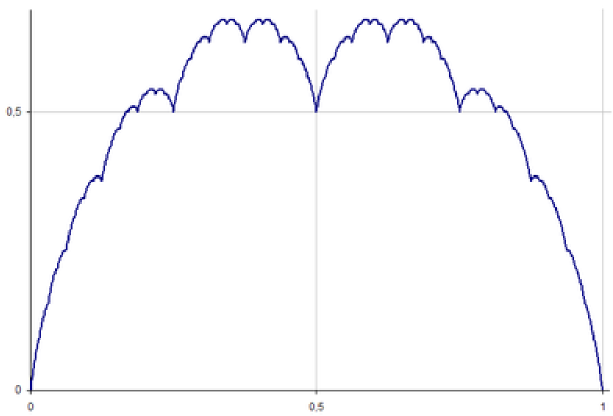


En gris les sinusoïdes à sommer pour obtenir la fonction

Bref :

dérivable + dérivable + dérivable + …
=
non dérivable !

Une petite dernière, datant de 1903 : la courbe de Tagaki, alias courbe du blanc-manger (parce qu'elle ressemblerait au blanc-manger, un pouding au lait d'amande. On y ajoute de la noix de coco, de l'abricot ou des fruits rouges, selon les préférences culinaires).



Source (à lire) :
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2009/06/28/14224286.html