DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

I. Axiomes

En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les Éléments d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en logique mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie est appelé axiomatique. Cette axiomatique doit être non-contradictoire, c'est sa seule contrainte.

AXIOMES D'INCIDENCE.

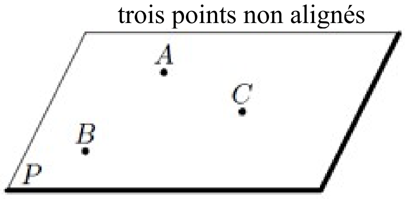
1. Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite, qui peut être notée (AB).

2. Par trois points non alignés A, B et C, il passe un unique plan, qui peut être noté (ABC).

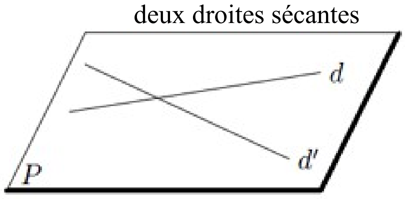
3. Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Un plan peut donc être déterminé par l'une des conditions suivantes :

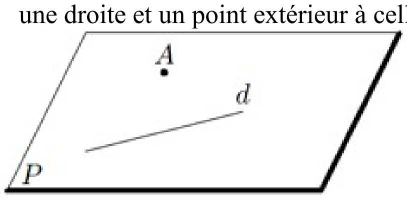
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



II. Positions relatives de droites et plans

PROPRIÉTÉ.

Les résultats de la géométrie plane sont vrais dans n'importe quel plan de l'espace.

II.1 Positions relatives de deux droites

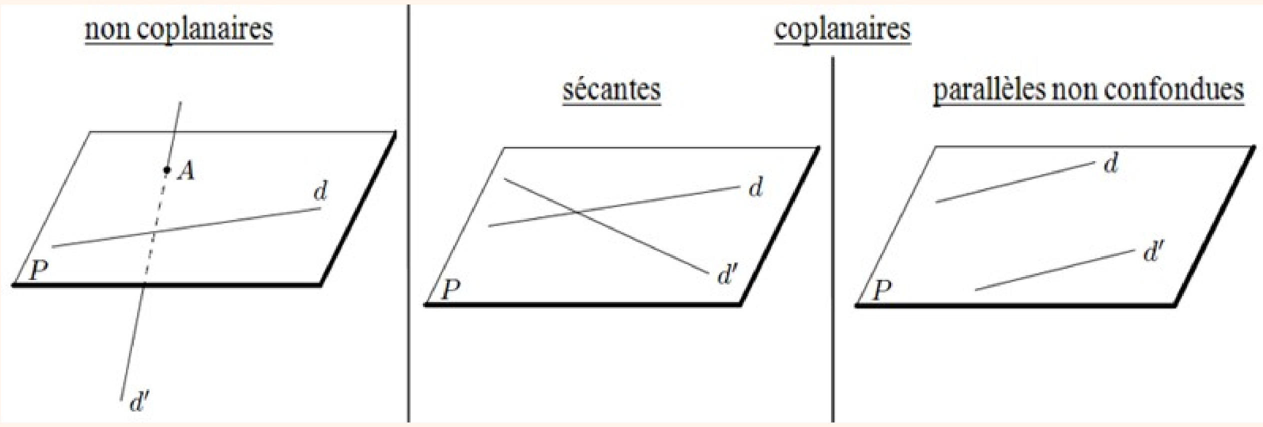
DÉFINITION.

Deux droites de l'espace sont dites :

- ***coplanaires*** si elles sont contenues dans le même plan;
- ***parallèles*** si elles sont contenues dans le même plan et si elles sont parallèles dans ce plan;
- ***non coplanaires*** s'il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.

PROPRIÉTÉ. Soient d et d' deux droites distinctes.

Les configurations suivantes sont les seules possibles :



II.2 Positions relatives de deux plans

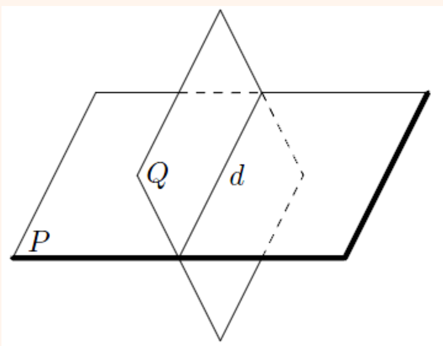
PROPRIÉTÉ. Soient P et Q deux plans distincts.

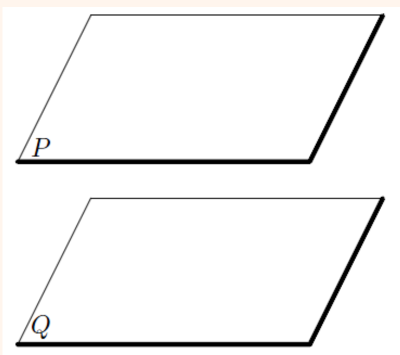
Les configurations suivantes sont les seules possibles :

a) les plans ont un point commun, alors ils sont .... suivant une droite passant par ce point[1];

b) ils n'ont aucun point commun, alors ils sont ....

....

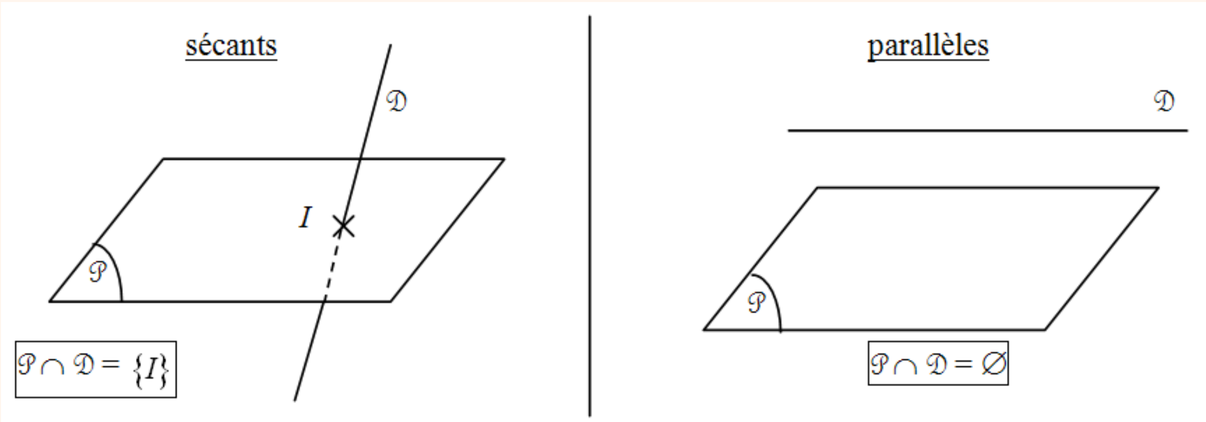




1 Ainsi, deux plans distincts qui ont 2 points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points.

II.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

PROPRIÉTÉ. Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite <u>non incluse dans ce plan</u>.
Les configurations suivantes sont les seules possibles :

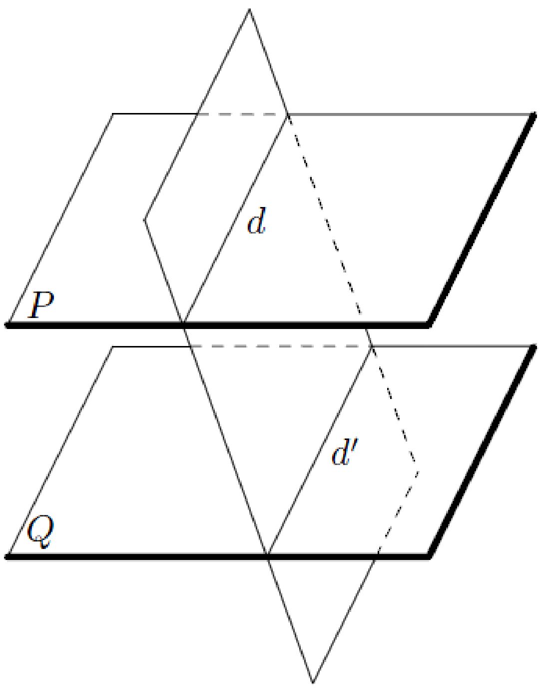


III. Propriétés liées au parallélisme

III.1 Parallélisme entre droites

PROPRIÉTÉ.
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont ....

PROPRIÉTÉ.
Si deux plans sont parallèles,
alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection ....

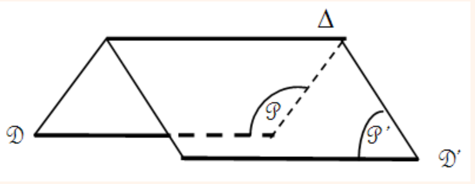


THÉORÈME DU TOIT.

Si :

- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites parallèles
- $\mathscr{P}$ est un plan contenant $\mathscr{D}$, $\mathscr{P}'$ est un plan contenant $\mathscr{D}'$
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ

alors ....



Une autre façon de l'énoncer :

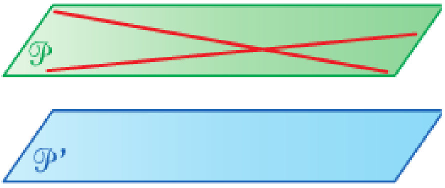
THÉORÈME DU TOIT.
Soient P et P' deux plans sécants suivant une droite Δ.
Si une droite d de P est parallèle à une droite d' de P', alors Δ est parallèle à d et d'.

Démonstration : R.O.C. (par l'absurde, ou avec l'outil vectoriel dans un prochain chapitre)

III.2 Parallélisme entre plans

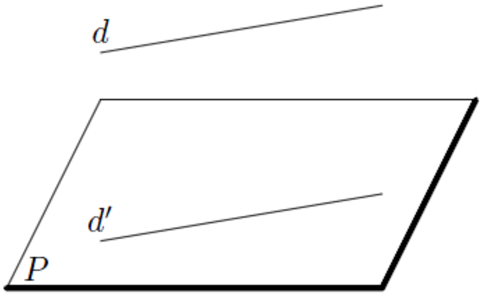
PROPRIÉTÉ.
Deux plans parallèles à un même troisième plan sont ....

PROPRIÉTÉ.
Si un plan P contient deux droites sécantes et parallèles à un plan P',
alors les plans P et P' sont parallèles.



III.3 Parallélisme entre droites et plans

PROPRIÉTÉ.
Si une droite d est parallèle à une droite d',
alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d'.



Démonstration : possible sans l'outil vectoriel (voir page 321, par l'absurde)

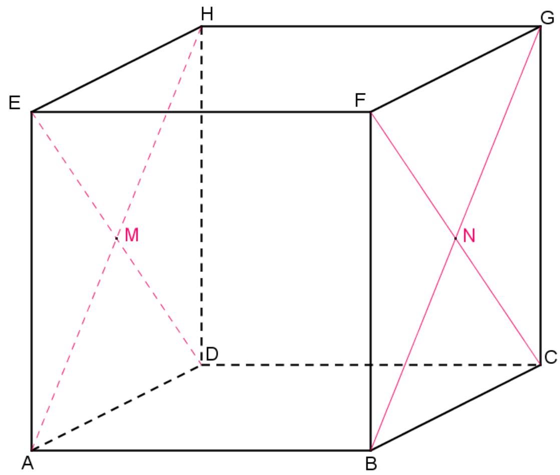
IV. Un petit QCM pour visualiser

On considère un cube ABCDEFGH.

Sur la représentation du cube en perspective cavalière ci-contre, on a dessiné le point M, centre du carré ADHE, et le point N, centre du carré BCGF.

Partie A
Pour chaque proposition, dire si elle vous semble vraie ou fausse, en cochant une des cases.

(AB) et (EH) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux
(AH) et (DG) sont sécantes	☐ vrai	☐ faux
(AN) et (EN) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux
(AB) et (GF) sont parallèles	☐ vrai	☐ faux
(DG) et (EM) sont sécantes	☐ vrai	☐ faux
(BH) et (NA) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux



Partie B
Compléter le tableau ci-dessous, en indiquant l'ensemble d'intersection des deux plans.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

Exemple : les plans (HGF) et (FGC) sont sécants en (FG); leur ensemble d'intersection est donc la droite (FG)...

intersection ☞	Ø	un point		une droite		un plan	
(HGF) et (FGC)	☐	☐		☒	(FG)	☐	
(EGH) et (FBH)	☐	☐		☐		☐	
(MEH) et (FBN)	☐	☐		☐		☐	
(MDH) et (HEA)	☐	☐		☐		☐	
(HGA) et (EFD)	☐	☐		☐		☐	
Même consigne, cette fois en indiquant l'ensemble d'intersection de la droite et du plan.							
(AE) et (BGH)	☐	☐		☐		☐	
(DM) et (DCG)	☐	☐		☐		☐	
(EF) et (HGF)	☐	☐		☐		☐	
(AC) et (EFG)	☐	☐		☐		☐	

V. Orthogonalité

V.1 Orthogonalité de deux droites

DÉFINITION.
Deux droites D et D' sont orthogonales dans l'espace lorsque leurs parallèles respectives menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

Notation : on note $D \perp D'$. Attention, c'est la même notation que pour la perpendicularité.

Remarque : **il ne faut pas confondre orthogonale et perpendiculaire.**
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et donc pas nécessairement sécantes.

Donc « deux droites perpendiculaires sont orthogonales ».
La réciproque est fausse.

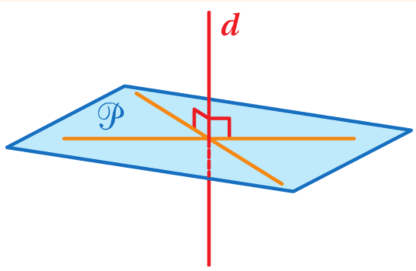
Attention : deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles...

V.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

DÉFINITION.
Une droite D est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toutes les droites du plan P.
On note : $D \perp P$.

THÉORÈME.

Si une droite D est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P, alors elle est orthogonale au plan P.



V.3 Perpendicularité de deux plans

DÉFINITION.
Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un deux contient une droite orthogonale à l'autre.