Montrons l'***inégalité de Bernoulli*** : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na$.

On note P(n) : « $\forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

Initialisation : $n=0$

Soit $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$: $(1+a)^0=1$ et $1+na=1$ donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n ∈ ℕ. On suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie : $\forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na$.

Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, *ie* $\forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.

Soit $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$: $(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a)$

donc $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$ (on a utilisé l'hypothèse de récurrence)

c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na+na^2$.

Or, $na^2 \geqslant 0$ donc : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na$

c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$ *(ce qu'il fallait démontrer)*

Conclusion : ce raisonnement par récurrence montre que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na}$$