INITIATION AU RAISONNEMENT

Table des matières

I. Une réunion de danseurs : un peu de logique

Une réunion de danseurs du monde entier a lieu au Zénith de Toulouse.
Les danseurs américains, patriotes, unis et motivés, portent tous une cravate rouge.
En mathématiques, on pourrait écrire l'énoncé comme un théorème :

« Soit un danseur de cette réunion. S'il est américain, alors il porte une cravate rouge. »

1. Au Zénith de Toulouse, on voit quelqu'un qui porte une cravate noire.
Est-il danseur américain ? ....

....

2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une cravate rouge.
Est-il danseur américain ? ....

....

3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'une danseuse française.
Porte-t-elle une cravate rouge ? ....

....

4. Dans le hall, on voit une sublime danseuse américaine qui répète une chorégraphie en chantant la chanson des bisounours. Porte-t-elle une cravate rouge ?

....

....

II. Définitions : proposition, propriété, théorème, contre-exemple

☞ Une proposition (phrase mathématique) est une affirmation qui peut être vraie ou fausse.

☞ Une ***propriété*** est une proposition qui est ***vraie*** (donc démontrée).
Un ***théorème*** est une propriété que l'on juge très importante. Cela est donc parfois subjectif.

Exemples :

· **P1** : « Si j'habite en France, alors j'habite à Toulouse (31). »
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? ....
Justifier votre réponse : ....

· **P2** : « Si un nombre entier naturel se termine par 3 alors il est divisible par 3. »
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? ....
Justifier votre réponse : ....

Ci-dessus, on a utilisé un ***contre exemple*** pour démontrer qu'une proposition est fausse.

Autre exemple : Un élève pense avoir trouvé une règle beaucoup plus facile que celle du prof pour ajouter des fractions... Il pense que : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Comment le prof peut convaincre l'élève qu'il a tort ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. Réciproque et contraposée

La ***réciproque*** de la proposition : « si A est vraie alors B est vraie » est la proposition :
« si ……………………… alors …………………… »

La ***contraposée*** de la proposition : « si A est vraie alors B est vraie » est la proposition :
« si ……………………… alors …………………… »

1. Préciser si les propositions énoncées sont vraies ou fausses :

A1 : « Si j'habite Albi (81) alors j'habite en France » …………

A2 : « Si un entier naturel se termine par 0 alors il est divisible par 5 » …………

A3 : « Si une figure est un carré, alors cette figure n'est pas un triangle » …………

A4 : « Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2+AC^2=BC^2$ » …………

A5 : « Si $AB^2+AC^2=BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A » …………

A6 : « Si $x=3$ alors $x^2=9$ » …………

2. Énoncer la réciproque de chacune des propositions ci-dessus, et préciser si elles sont vraies ou fausses.

récip. A1 : ……………………………………………………………………………………

récip. A2 : ……………………………………………………………………………………

récip. A3 : ……………………………………………………………………………………

récip. A4 : ……………………………………………………………………………………

récip. A5 : ……………………………………………………………………………………

récip. A6 : ……………………………………………………………………………………

3. Énoncer la contraposée de chacune des propositions ci-dessus, et préciser si elles sont vraies ou fausses.

contr. A1 : ……………………………………………………………………………………

contr. A2 : ……………………………………………………………………………………

contr. A3 : ……………………………………………………………………………………

contr. A4 : ……………………………………………………………………………………

contr. A5 : ……………………………………………………………………………………

contr. A6 : ……………………………………………………………………………………

A retenir : La réciproque d'une propriété peut être ……………………
La contraposée d'une propriété est ……………………………

IV. Implication et équivalence

☞ Une ***implication*** est une proposition indiquant qu'une hypothèse P entraîne (ou implique) une conclusion Q.

Exemple : On considère les propositions suivantes :

P: « $x^2=13$ »
Q: « $x=\sqrt{13}$ ou $x=-\sqrt{13}$ »
I : « si $x^2=13$ alors ($x=\sqrt{13}$ ou $x=-\sqrt{13}$) ».

Autrement dit, la proposition I est « si P est .... alors Q est .... ».

On peut noter P ⇒ Q, ce qu'on lit : « P implique Q ».

Cette implication est-elle vraie ? …………

Écrire la proposition réciproque : « si ....

.... »

On peut aussi noter cette réciproque : ... ⇒ …

Cette réciproque est-elle vraie ? …………

On peut conclure que : « $x^2=13$ » ***équivaut à*** « $x=\sqrt{13}$ ou $x=-\sqrt{13}$ ».
P et Q expriment la même information de deux manières différentes
Les propositions P et Q sont dites ***équivalentes*** : on peut noter :

$$\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$$

Exercice IV.1 :
Soient a et b deux nombres réels.
1. L'équivalence suivante est fausse ? Démontrez-le.

« $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ »

....

....

....

2. Démontrer l'équivalence « $a^2=b^2 \Leftrightarrow (a=b \text{ ou } a=-b)$ ».

....

....

....

....

....

....

Exercice IV.2 :

Dans chacun des cas ci-dessous, compléter le tableau à l'aide de V (vrai) ou F (faux) :

P	Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	P ⇔ Q
n est un multiple de 5	Le chiffre des unités de n est 5			
AI + IB = AB	I est le milieu de [AB]			
$x > 0$	$x + 4 > 0$			
C'est le premier mai	Le lycée est fermé			
Le triangle ABC est rectangle en A	$BC^2 = AB^2 + AC^2$			
AB = CD	ABDC est un parallélogramme			
AB = CD et AC = BD	ABDC est un parallélogramme			
ABCD est un rectangle	AC = BD			
$xy > 0$	$x > 0$ et $y > 0$			

(x et y sont des réels)

Exercice IV.3 : Quel est le problème dans le raisonnement suivant ?

« Si $\dfrac{x^2 - x}{x} = 0$ alors $x^2 - x = 0$ alors $x(x-1) = 0$ alors ($x = 0$ <u>ou</u> $x = 1$).

Conclusion : les solutions de cette équation sont 0 et 1. »

....

....

....

Exercice IV.4 (résolu) : résoudre l'équation $(x+2)^2 = 4$.

Pour résoudre cette équation, voici ce qu'on peut montrer dans un premier temps (voir plus bas) :

(il existe au moins un x tel que $(x+2)^2 = 4$) ⇒ ($x = 0$ ou $x = -4$)

Mais la réciproque est-elle vraie ? C'est-à-dire, est-ce vraie que :

($x = 0$ ou $x = -4$) ⇒ (il existe au moins un x tel que $(x+2)^2 = 4$)

Si on ne vérifie pas si la réciproque est vraie, alors ***on prend l'énorme risque*** *d'avoir supposé qu'il y avait un x qui vérifiait $(x+2)^2 = 4$ et de conclure que $x = 0$ ou $x = -4$, alors que peut-être nous avions tort en supposant qu'il existait un x ! Voilà pourquoi on doit vérifier si la réciproque est vraie, et l'utilité du symbole ⇔ est simple : elle permet de démontrer la proposition et sa réciproque en même temps...*

<u>MÉTHODE 1</u> :

Si x vérifie $(x+2)^2 = 4$ alors :

$x^2 + 4x + 4 = 4$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$

$x = 0$ ou $x = -4$

Réciproquement :

- si $x = 0$ alors $(x+2)^2 = (0+2)^2 = 2^2 = 4$
- si $x = -4$ alors $(x+2)^2 = (-4+2)^2 = (-2)^2 = 4$

Conclusion : l'équation $(x+2)^2 = 4$ admet exactement deux solutions : 0 et -4 .

<u>MÉTHODE 2</u> :

$$(x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4$$

Conclusion : l'équation $(x+2)^2 = 4$ admet exactement deux solutions : 0 et -4 .