EXERCICE 109 PAGE 304
CORRECTION des questions c. et d.

Pour chacune des fonctions, étudier la dérivabilité sur l'ensemble de définition et déterminer la fonction dérivée correspondante.

c. Fonction h définie sur $]3;+\infty[$ par : $h(x)=\ln\left(\dfrac{4x+1}{x-3}\right)$.

d. Fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x)=x\ln(e^x+1)$.

c.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{4x+1}{x-3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

► h est donc bien définie sur $]3;+\infty[$, que l'on note I.

► On note w la fonction définie sur I par $w(x)=\dfrac{4x+1}{x-3}$.

- w est le quotient de deux fonctions dérivables sur I, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur I, donc w est dérivable sur I.
- De plus, w est strictement positive sur I. ← on pourrait aussi dire : w est à valeurs dans $]0;+\infty[$

Donc la fonction composée de $\ln$ et w (c'est-à-dire la fonction h) est dérivable sur I, et $h'=\dfrac{w'}{w}$.

► En posant $u(x)=4x+1$ et $v(x)=x-3$: $w'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$\forall x\in \text{I}$: $\quad w'(x)=\dfrac{4(x-3)-(4x+1)\times 1}{(x-3)^2}=\ldots=\dfrac{-13}{(x-3)^2}$

et $h'(x)=\dfrac{\frac{-13}{(x-3)^2}}{\frac{4x+1}{x-3}}$ *ie* $h'(x)=\dfrac{-13}{(x-3)(4x+1)}$.

d. ► On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=e^x+1$.

- u est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- De plus, u est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction composée de $\ln$ et u (qu'on note f) est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'=\dfrac{u'}{u}$.

D'où, pour tout réel x : $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

► On note g la fonction identité sur $\mathbb{R}$: $g(x)=x$. La fonction k est donc le produit de g et f, qui sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: par conséquent, k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $k'=g'f+gf'$.

$\forall x\in\mathbb{R}$: $\quad k'(x)=1\times\ln(e^x+1)+x\times\dfrac{e^x}{e^x+1}$ *ie* $k'(x)=\ln(e^x+1)+\dfrac{x\,e^x}{e^x+1}$.