IE du 24/03/2022

Total sur 22

Exercice 1

a) $\ln(20^7) = 7\ln(5\times 2^2) = 7(\ln 5 + \ln(2^2))$
$= 7\ln 5 + 7\times 2\ln 2$
$= 7\ln 5 + 14\ln 2.$

b) $\ln\left(\frac{105}{112}\right) = \ln\left(\frac{3\times 5\times 7}{2^4\times 7}\right) = \ln(3\times 5) - \ln(2^4)$
$= \ln 3 + \ln 5 - 4\ln 2.$

c) $\ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{8} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 8 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(2^3)$
$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\times 3\ln 2$
$= 2\ln 2$

Exercice 2

1) • $2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$

• $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$: $\ln(2x+1) = 3 \iff 2x+1 = e^3$
$\iff x = \frac{e^3-1}{2}$

Or $\frac{e^3-1}{2} \simeq 9{,}5$,

donc l'unique solution de $\ln(2x+1) = 3$ est $\frac{e^3-1}{2}$.

2) $\forall x \in]-\infty;1[$: $\ln(1-x) \leq -1 \iff 1-x \leq e^{-1}$
$\iff x \geq 1-e^{-1}$

On a bien $1-e^{-1} < 1$

d'où l'ens. solution de l'inéquation : $[1-e^{-1}\,;1[$.

3) • $-3x-4>0 \iff x<-\frac{4}{3}$

• $7-x>0 \iff x<7$

L'inéquation est donc définie sur $]-\infty;-\frac{4}{3}[$.

• $\ln(-3x-4)+\ln(7-x)\geqslant 1$

$\iff \ln((-3x-4)(7-x))\geqslant 1$

$\iff (-3x-4)(7-x)\geqslant e$

$\iff -21x+3x^2-28+4x-e\geqslant 0$

$\iff 3x^2-17x-28-e\geqslant 0$

Discriminant : $\Delta=(-17)^2-4\times 3\times(-28-e)$

$\Delta = 289+336+12e = 625+12e$

$\Delta>0$ donc $3x^2-17x-e=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-17)-\sqrt{\Delta}}{2\times 3}=\frac{17-\sqrt{\Delta}}{6}\simeq -1,44$$

$$x_2=\frac{17+\sqrt{\Delta}}{6}\simeq 7,1$$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{4}{3}$
$3x^2-17x-e$		+	0	-	

D'où l'ensemble solution de l'inéquation : $]-\infty;\frac{17-\sqrt{\Delta}}{6}]$

Exercice 3

$\left(\frac{6}{7}\right)^n<10^{-12} \iff \ln\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n\right)<\ln(10^{-12})$

$\iff n\ln\left(\frac{6}{7}\right)<\ln(10^{-12})$

$\iff n>\frac{\ln(10^{-12})}{\ln\left(\frac{6}{7}\right)}$ car $\ln\left(\frac{6}{7}\right)<0$

Or $\frac{\ln(10^{-12})}{\ln\left(\frac{6}{7}\right)}\simeq 179,2$

Donc le plus petit entier n tel que ... est 180.