EXERCICE 1 ≈ 15 minutes

1. Pour tout réel x de $[0;+\infty[$: $f'(x)=0+90(-0{,}4e^{-0{,}4x})=-36e^{-0{,}4x}$.

Or $e^{-0{,}4x}>0$ donc $f'(x)<0$.

Donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2.
- f est dérivable sur $[0;+\infty[$, donc f est continue sur $[0;+\infty[$
- f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$
- $f(0)=-1+90e^0=89$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$, avec $0\in]-1;89]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

3. Avec la méthode par balayage, on obtient :

11 < α < 12 puis 11,2 < α < 11,3 puis 11,24 < α < 11,25 puis 11,249 < α < 11,250.

EXERCICE 2 ≈ 20 minutes

1. $x=\frac{3}{4}x+7 \Leftrightarrow$ … (à faire) $\Leftrightarrow x=28$

Donc cette équation admet une unique solution : $\alpha=28$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1}-28 &&= \frac{3}{4}u_n+7-28 \\ &= \frac{3}{4}u_n-21 &&= \frac{3}{4}\left(u_n-21\times\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{3}{4}(u_n-28) &&= \frac{3}{4}w_n \end{aligned}$$

donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

3. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n=w_0\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Or $w_0=u_0-28=5-28=-23$ donc $w_n=-23\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Or $u_n=w_n+\alpha$ donc $u_n=-23\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+28$.

4. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ car $0<\frac{3}{4}<1$

donc par produit et somme de limites : $\lim_{n\to+\infty} u_n=28$.