SÉANCE DU JEUDI 8 AVRIL 2021

→ Séance en visio de 10h00 à 12h00 ←

0. Questions éventuelles sur les séances du mardi 6 avril et mercredi 7 avril

I. Exercices

• 76 p384

$\to \int_0^1 (x^2+4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^1=\ldots=\frac{13}{3}$

$\to \int_2^3 \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t=\int_2^3 \frac{1}{3}\times 3\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\right]_2^3=\ldots=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^6+\frac{1}{3}\mathrm{e}^9$

$\to \int_1^2 \left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{\frac{1}{2}x^2}{2}+x\right]_1^2=\ldots=\frac{7}{4}$

$\to \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln|x|]_1^{\mathrm{e}}=\ldots=1$

• 77 p384

$\to \int_0^1 (x^4-4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{5}x^5-4x\right]_0^1=\ldots=-\frac{19}{5}$

$\to \frac{1}{x^4}=x^{-4}$. C'est de la forme $u'u^{-4}$ donc une primitive est de la forme $\frac{1}{-4+1}u^{-4+1}=-\frac{1}{3}u^{-3}=-\frac{1}{3u^3}$.

D'où : $\int_2^3 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_2^3=\ldots=\frac{19}{648}$

$\to \cos(2x)=\frac{1}{2}\times 2\cos(2x)$. C'est de la forme $\frac{1}{2}u'\cos(u)$ donc une primitive est de la forme $\frac{1}{2}\sin(u)$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\ldots=0$

$\to \int_1^2 \mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t=\int_1^2 \frac{1}{2}\times 2\,\mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}\right]_1^2=\ldots=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^3+\frac{1}{2}\mathrm{e}^5$

• 84, 85 p384

$\to \int_{-1}^3 \mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^3 3\times\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x=\left[3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\right]_{-1}^3=\ldots=3\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\right)$

$\to \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. C'est de la forme $\frac{3}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ donc une primitive est de la forme $\frac{3}{2}\times 2\sqrt{u}=3\sqrt{u}$.

D'où : $\int_0^4 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=[3\sqrt{x^2+1}]_0^4=\ldots=3\sqrt{17}-3$

• **86 p384**

$\mathrm{F}(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

a. $\mathrm{F}(0)=0$

b. D'après le cours : F est dérivable et $\mathrm{F}'(x)=\ln(1+x^2)$.

$\forall x \in [0;+\infty[$, $1+x^2 \geqslant 1$ donc $\mathrm{F}'(x)\geqslant 0$ donc F est croissante sur $[0;+\infty[$.

c. $\mathrm{F}(10)=\int_0^{10} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \approx 29{,}0935$ ← aire sous la courbe de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t^2)$ sur $[0;10]$.

II. IPP

• Démonstration de la propriété « Intégration par parties » (page 7 du cours) :

> u et v sont dérivables sur I donc le produit $u\,v$ est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$
> d'où $uv'=(uv)'-u'v$.
> Les fonctions u et v sont dérivables sur I, donc continues sur I.
> De plus, u' et v' sont continues sur I, donc les produits $u'v$ et uv' également.
>
> On a alors : $\int_a^b uv'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b ((uv)'(x)-u'v(x))\,\mathrm{d}x$.
>
> Par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b uv'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x$
>
> d'où $\underline{\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t}$.

• Exemple A3 à faire à la maison (corrigé dans le manuel)

III. Exercices

• **14 p375**

a. On pose $u(t)=2t+1$ et $v'(t)=\mathrm{e}^t$; $u'(t)=2$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$.

D'après l'IPP : $\int_0^1 (2t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=[(2t+1)\mathrm{e}^t]_0^1-\int_0^1 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \ldots = \mathrm{e}+1$

b. On pose $u(t)=t$ et $v'(t)=\cos t$; $u'(t)=1$ et $v(t)=\sin t$.

D'après l'IPP : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \ldots = \underline{\dfrac{\pi-2}{2}}$

c. On pose $u(t)=t^2$ et $v'(t)=\mathrm{e}^t$; $u'(t)=2t$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$.

D'après l'IPP : $\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=[t^2\mathrm{e}^t]_0^1-\int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}-0-\int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}-\int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

On refait une IPP, en posant : $w(t)=2t$ et $x'(t)=\mathrm{e}^t$; $w'(t)=2$ et $x(t)=\mathrm{e}^t$.

Alors : $\int_0^1 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=[2t\,\mathrm{e}^t]_0^1-\int_0^1 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=2\mathrm{e}-0-[2\mathrm{e}^t]_0^1=2\mathrm{e}-(2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^0)=2$.

Finalement : $\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\underline{\mathrm{e}-2}$.

d. On pose $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=t+1$; $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v(t)=\dfrac{1}{2}t^2+t$.

D'après l'IPP : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(t+1)\ln t\,\mathrm{d}t=\left[\ln(t)\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\mathrm{d}t=\ln(\mathrm{e})\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}\right)-0-\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{t}{2}+1\right)\mathrm{d}t$

$$=\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\left[\ln(t)\left(\frac{t^2}{4}+t\right)\right]_1^{\mathrm{e}}=\ldots=\boxed{\frac{\mathrm{e}^2+5}{4}}$$

• 125 p388

D'après le cours : $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_2^x \ln(t-1)\,\mathrm{d}t+3$.

choisi pour que $uv'(t)=\dfrac{t-1}{t-1}=1$ *dans l'IPP*

On pose : $v(t)=\ln(t-1)$ et $u'(t)=1$; $v'(t)=\dfrac{1}{t-1}$ et $u(t)=t-1$.

D'après l'IPP : … $\boxed{\mathrm{F}(x)=(x-1)\ln(x-1)-x+5}$.