CALCUL INTÉGRAL

Rappels

cours → p.364

8 exercices corrigés → p.365

I. Calculer l'aire sous une courbe

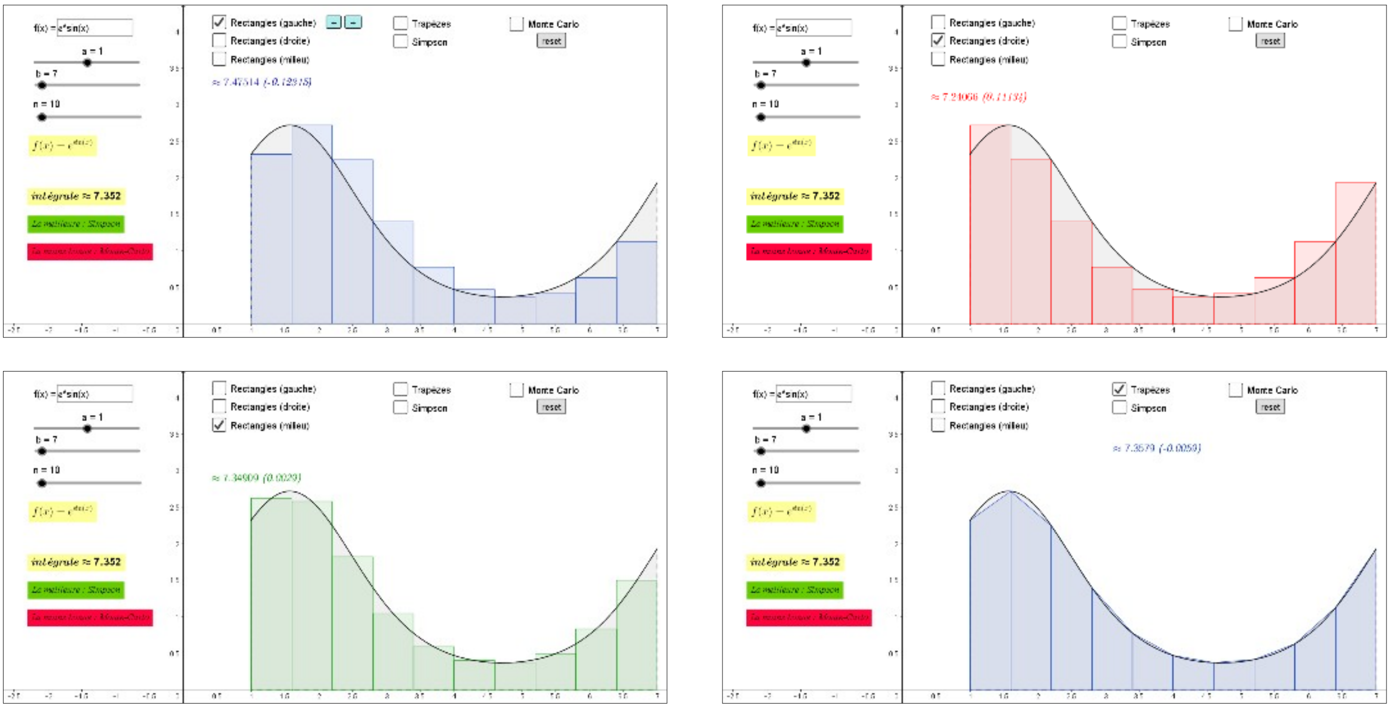
Résumé de ce qui a été fait en classe (sans les programmes Python) :

• $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être considéré comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{\mathrm{i}=0}^{n-1} f(x_\mathrm{i})\Delta x_\mathrm{i}$, qui est la limite d'une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x_\mathrm{i})$ et de largeur Δx_i où $\Delta x_\mathrm{i}=x_{i+1}-x_i$.

Le $\mathrm{d}x$ désigne donc une quantité infinitésimale (proche de 0) et $\int_a^b$ désigne une somme infinie.

Pour la méthode des rectangles à gauche, cela donne : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)\dfrac{b-a}{n}$.

• Pour voir ce que donne cette méthode des « rectangles à gauche » ainsi que d'autres méthodes (« rectangles à droite », « rectangles par le milieu », « trapèzes », « Simpson », « Monte Carlo »), voir cette vidéo : youtu.be/oFDrmpN0ql8 (≈ 12 min).



Fichier Geogebra associé : geogebra.org/m/gf3c3sng

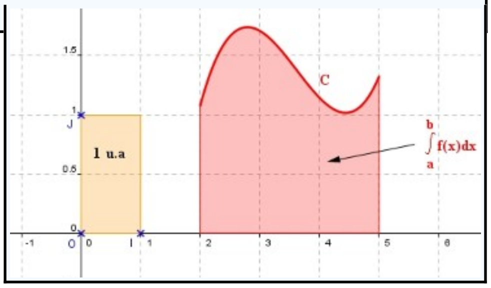
II. Intégrale d'une fonction continue positive

DÉFINITION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a \leqslant b$).

On note *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

On appelle ***intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$***, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, le nombre réel représentant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan D délimitée par *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



REMARQUES :

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- a et b sont les ***bornes d'intégration***.
- x est la ***variable d'intégration***, elle peut être remplacée par une autre lettre :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(v)\,\mathrm{d}v= \text{etc.}$$

Mais cette notation est indispensable pour définir l'expression de la fonction que l'on intègre, par exemple : $\int_a^b k e^{-x}\mathrm{d}x$: « $\mathrm{d}x$ » indique alors clairement quelle est la variable.

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

EXEMPLE C1

Soit *k* un réel positif. Soient *a* et *b* deux réels tels que $a \leqslant b$. Calculer $\int_a^b k\,\mathrm{d}x$.

EXEMPLE C2

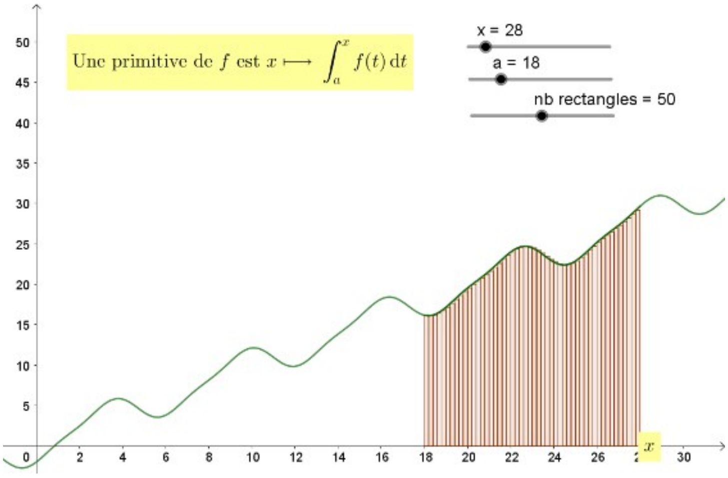
Le plan étant muni d'un repère orthonormé, après avoir reconnu la courbe représentative de la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ sur $[0;1]$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

La calculatrice donne quelle valeur approchée ?

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$.



← lien : geogebra.org/m/nvgv7xat

Démonstration : dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$. *Admis dans le cas général.*

Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Soit $x \in [a;b]$. On pose $h \in \mathbb{R}$ avec $h>0$ et $x+h \in [a;b]$.

1. Démontrer que : $F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$.

2. Démontrer que : $h\times f(x)\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant h\times f(x+h)$.

3. En déduire que : $f(x)\leqslant\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)$.

4. Justifier que : $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

5. On admet que le résultat de la question 3. est toujours vrai avec $h<0$.
Que peut-on en déduire sur F ?

déjà vue au chapitre « Primitives et équations différentielles »

PROPRIÉTÉ

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Démonstration : dans le cas d'un intervalle fermé borné $[a;b]$, en admettant que la fonction possède alors un minimum sur cet intervalle. *Admis dans le cas général.*

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$.
On admet que f admet un minimum m sur $[a;b]$.
On pose $g(x)=f(x)-m$.

1. Démontrer que g est continue et positive sur $[a;b]$.

2. On définit les fonctions G et F sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ et $F(x)=G(x)+mx$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $[a;b]$.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Notation : on note souvent $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[\mathrm{F}(x)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Démonstration :

- f est continue et positive sur $[a;b]$ donc la fonction G définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{G}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

On a donc : $\mathrm{G}(a)=0$.

- F est aussi une primitive de f sur $[a;b]$, donc il existe un réel k tel que $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$.

On a alors : $\mathrm{G}(a)=\mathrm{F}(a)+k$.

- Finalement : $k=-\mathrm{F}(a)$, et donc $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)$.

Avec $x=b$, cela donne : $\mathrm{G}(b)=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ c'est-à-dire : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Exemples C3 et C4

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$. Calculer $\int_a^b (3+x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b (-2\mathrm{e}^x+4)\,\mathrm{d}x$.

III. Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Cette fonction admet une primitive F. Notons G une autre primitive de f : $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
Alors : $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=(\mathrm{G}(b)-k)-(\mathrm{G}(a)-k)=\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a)$.
Autrement dit, la différence F(b) – F(a) ne dépend pas de la primitive choisie.

Et on a vu que si f est positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$, d'où la définition suivante :

DÉFINITION Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On note F une primitive de f sur I. Pour tous nombres a et b de I, on définit ***l'intégrale de f sur*** $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ par : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

PROPRIÉTÉS

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0 \text{ et } \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstrations : évidentes avec la définition.

Exemple A1

p. 371 SF2

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 47x^{2020}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_1^2 \left(3t+2-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ **c.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ **d.** $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x\,.$

PROPRIÉTÉ Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'=f$.

Autrement dit, F est une primitive de f sur $[a;b]$: c'est la primitive qui s'annule en a.

Démonstration : on a déjà démontré cette propriété dans le cas où f est positive sur $[a;b]$.

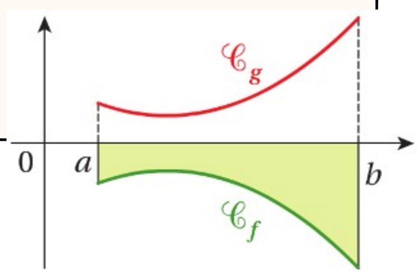
Soit $x \in \mathrm{I}$.

D'après la définition : $\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(a)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(x)$, où G est une primitive de f.

Or, G est dérivable et $\mathrm{G}'=f$ donc F est dérivable et $f=\mathrm{F}'$.

PROPRIÉTÉ Soit f une fonction continue et négative sur $[a;b]$, de courbe rep. C.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égal à l'opposé de l'aire, en unités d'aire, de la partie l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Démonstration :

On pose $g=-f$. Alors g est continue est positive sur $[a;b]$.
On note F une primitive de f sur $[a;b]$.
Alors une primitive de g est $-\mathrm{F}$, notée G. On a donc $\mathrm{G}=-\mathrm{F}$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=-\mathrm{G}(b)+\mathrm{G}(a)=-(\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a))=-\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

PROPRIÉTÉ LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I. Pour tous nombres réels a et b de I :

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstrations : utiliser la propriété $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

PROPRIÉTÉ RELATION DE CHASLES

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tous nombres réels a , b et c de I : $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration : utiliser la propriété $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

PROPRIÉTÉS POSITIVITÉ ET RELATION D'ORDRE

Soient *f* et *g* des fonctions continues sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$.

• Si pour tout x de I, $f(x)\geqslant 0$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

• Si pour tout x de I, $f(x)\leqslant g(x)$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstrations :

- f est positive, donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une aire sous une courbe…
- On pose $h(x)=g(x)-f(x)$. On a donc $h(x)\geqslant 0$ et donc : $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

  C'est-à-dire : $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ d'où : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

EXEMPLE A2

p. 373 SF3

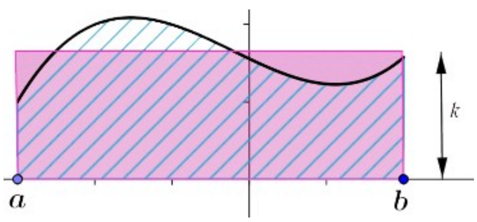
a. Montrer que : $\forall\, t\in[0;+\infty[$, $1-t\leqslant\dfrac{1}{1+t}\leqslant 1-t+t^2$.

b. En déduire que : $\forall\, x\in[0;+\infty[$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

DÉFINITION Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

La ***valeur moyenne de la fonction f*** sur $[a;b]$ est le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Autrement dit, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel k tel que le rectangle de dimensions $b-a$ et k soit de même aire (algébrique) que la partie du plan délimitée par la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



PROPRIÉTÉ INTÉGRATION PAR PARTIES

Soient u et v des fonctions <u>dérivables</u> sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$, avec u' et v' <u>continues</u> sur I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

<u>Démonstration</u> :

EXEMPLE A3


p. 375 SF4

1. Calculer les intégrales suivantes : **a.** $\displaystyle\int_0^2 (t+3)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ **b.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive qui s'annule en e de la fonction $\ln$ sur $]0;+\infty[$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

• Fiche bilan → p.378

• QCM 11 questions corrigées → p.379

• Exercices corrigés → 32 à 44 p.380

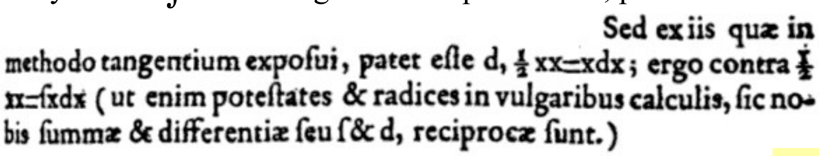
• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
→ maths-et-tiques : tsm-ci-ym
→ jaicompris.com : tsm-ci-jaicompris

→ Au XVII[e] siècle, de nombreux mathématiciens européens (Pierre de Fermat, Blaise Pascal, John Wallis, etc.) essaient de mesurer des surfaces et des longueurs de courbes.
Isaac Newton (1643 - 1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) apporteront quelque chose de fondamental : il y a réciprocité entre dérivation et intégration !
• L'approche de Newton est cinématique (par souci pédagogique : il semble savoir que sa méthode est plus générale) et antérieure à celle de Leibniz. Il cherche à déterminer la vitesse en fonction de la position d'un objet sur une courbe, et vice-versa. Dans ses calculs, il semble considérer la notion de *vitesse instantanée* comme naturelle, sans la définir. En réalité, derrière tout cela se cache la notion de *limite*, qui n'apparaîtra que deux siècles plus tard.
• L'approche de Leibniz est différente : il a le souci des généralités et donne de l'importance aux notations. Il est le premier à exprimer clairement qu'intégration et différentiation (= dériver) sont des opérations réciproques… Prolongeant les idées de Pascal, il considère de très petites variations de l'abscisse, notée $\mathrm{d}x$ (pour « différence des x »), ainsi que les valeurs de l'ordonnée, c'est-à-dire $f(x)$, qu'il note finalement $\mathrm{d}y$.
Il calcule alors la somme des aires des rectangles de base $\mathrm{d}x$ et de hauteur $f(x)$: $f(x)\mathrm{d}x$.
Si $\mathrm{d}x$ est pris infiniment petit, alors on peut négliger l'erreur commise…
L'absence de notion de limite ne lui permettra pas de définir rigoureusement ces notions.

→ L'approche de Leibniz est donc celle utilisée de nos jours. Pour lui, intégrer veut dire « faire la somme » d'aires de rectangles. Cette somme étant infinie, plutôt que de la noter grossièrement $\sum^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, il la désigne par la lettre s (un « s long[1] » ſ qui s'est allongé pour devenir $\int$), première lettre de l'expression latine *ſumma omnium*[2] (Leibniz écrivait aussi bien en latin qu'en français ou en allemand). Ce symbole est alors resté, contrairement à la lettre « I » (pour *integralis*) qu'aurait préféré Jean Bernoulli, frère de Jacques.

En France, les milieux scientifiques furent davantage marqués par Leibniz que par Newton. Il faut y voir l'influence des frères Bernoulli, inconditionnels du savant allemand et qui mobilisèrent tout leur génie pour mettre en valeur ses méthodes en résolvant divers problèmes.

Première publication du symbole $\int$ de l'intégrale ainsi que du $\mathrm{d}x$, par Leibniz[3] en 1686 :


Sed ex iis quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe d, ½ xx = xdx ; ergo contra ½ xx = ∫xdx (ut enim poteſtates & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ & differentiæ ſeu ∫ & d, reciprocæ ſunt.)

Mais ce symbole $\int$ apparaît dans les manuscrits de Leibniz dès le 21 novembre 1675 : il y écrit $\int$ plutôt que *omn.*, qui était l'abréviation utilisée jusqu'à présent. En effet, dès 1635, Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) utilisait l'expression *omnes lineas* pour exprimer son principe, aussi appelé *méthode des indivisibles*.
Leonhard Euler (1707 - 1783) utilisait la notation $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x=a \\ x=b \end{bmatrix}$.

1 Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/S_long
2 « somme totale »
3 Page 297 du journal *Acta Eruditorum* de juin 1686

La notation $\int_a^b$ est due à Joseph Fourier (1768 - 1830).

→ En 1695, dans une lettre à Leibniz datée du 12 février, le mathématicien Johann Bernoulli[4] (1667 - 1748) empruntera au latin moderne l'adjectif *integralis*, pour parler de *calculus integralis*, qui signifie finalement « somme totale ». Il indique avoir « été le premier à réfléchir à l'inverse du calcul différentiel » et à l'avoir « désigné aussi, quoiqu maladroitement, du nom de calcul des intégrales ». En réalité, son frère Jakob[5] (1654 - 1705) avait usé pour la première fois du terme « intégrale » en 1690 dans son mémoire sur sa solution de la courbe isochrone[6].
Dans une lettre à Jean, Leibniz expliquera pourquoi il préfère le terme de *sommation*. Mais le terme des Bernoulli prendra le dessus…

→ Dans tout ce chapitre, nous avons considéré des fonctions continues.
Les méthodes *des rectangles* présentées ici sont des cas particuliers de ce qu'on appelle des *sommes de Riemann*[7], du nom du grand mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826 - 1866) qui énoncera une définition rigoureuse dans un ouvrage de 1854 qui sera publié à titre posthume en 1867.
Au XIX^e^ siècle, le besoin d'intégrer une classe plus large de fonctions se fait sentir (notamment pour calculer les coefficients d'une série de Fourier, qui sont exprimés avec des intégrales) Riemann définit ce qu'est une fonction *intégrable* (pas nécessairement continue).
En 1875, Jean-Gaston Darboux (1842 - 1917) réussit un premier exposé rigoureux de l'intégrale, en démontrant que toute fonction continue sur $[a;b]$ est intégrable.
Puis Émile Borel (1871 - 1956) et surtout Henri-Léon Lebesgue (1875 - 1941) créeront une nouvelle théorie de l'intégration, permettant d'intégrer encore davantage de fonctions… C'est ce qu'on appelle des *intégrales de Lebesgue.*
Arnaud Denjoy (1912), Oskar Perron (1914) généraliseront cette notion, de manière compliquée. Jaroslav Kurzweil (1957) et Ralph Henstock (1961) reprendront ces travaux, d'une façon plus simple et plus élégante[8].
De nos jours, le concept semble achevé et l'intégrale de Lebesgue (non enseignée au lycée, trop compliquée) reste la référence.

4 Prénom francisé : Jean
5 Prénom francisé : Jacques
6 Voir page 423 de son *Opera* : https://archive.org/details/jacobibernoulli00wellgoog/page/n492/mode/2up
7 Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_de_Riemann
8 Plusieurs éléments de l'histoire de l'intégration exposés ici sont tirés de *Two histories of integration theory : riemannesque vs romanesque* : https://www.persee.fr/docAsPDF/barb_0001-4141_2007_num_18_1_28584.pdf

• Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$; l'aire du disque correspondant est πr^2.
Or la dérivée de πr^2 est $2\pi r$.

• Le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$; la surface de la sphère correspondante est $4\pi r^2$.

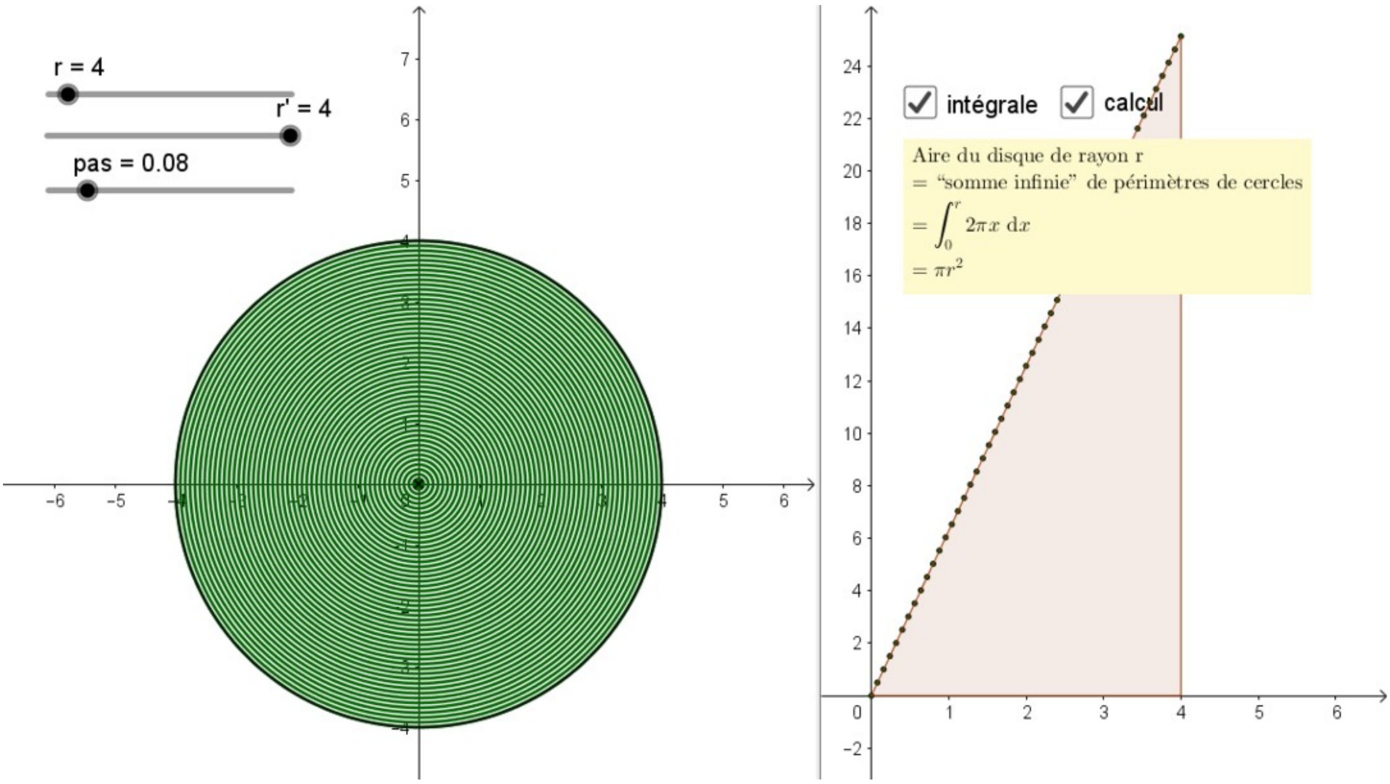
Or la dérivée de $\frac{4}{3}\pi r^3$ est $4\pi r^2$.

Y aurait-il un lien ?!

… OUI !!!

• L'aire d'un disque de rayon r est la « somme infinie » de périmètres de cercles de rayon x, avec x variant entre 0 et r. Autrement dit, il s'agit de l'intégrale $\int_0^r 2\pi x \, \mathrm{d}x$, ce qui donne πr^2.

Autrement dit, il est normal que la dérivée de l'aire du disque donne le périmètre d'un cercle.

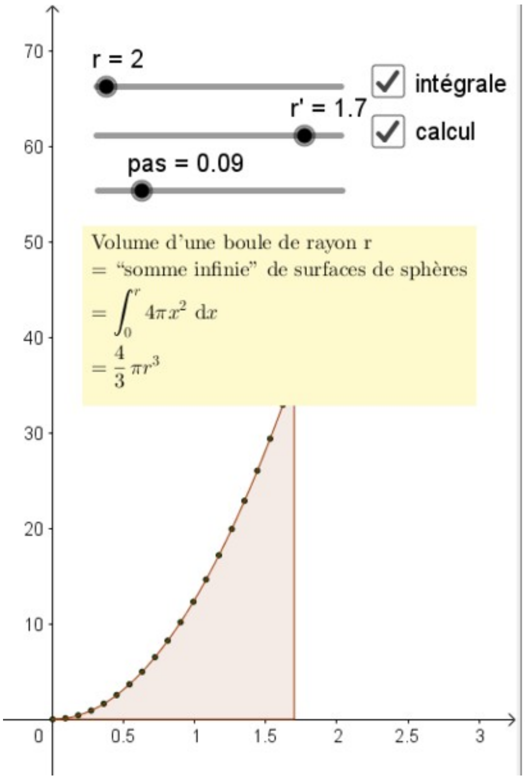


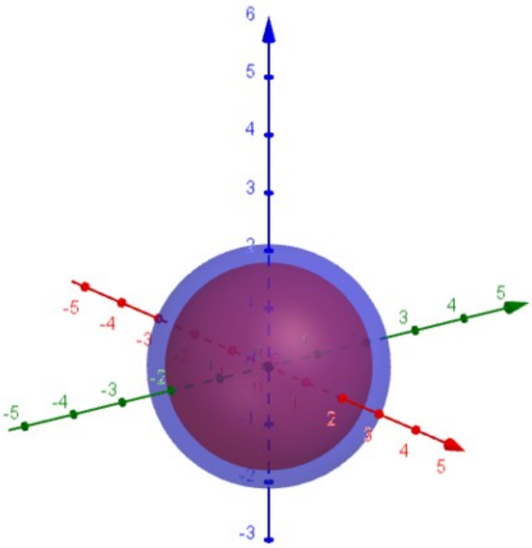
• De la même manière, le volume d'une boule de rayon r est égal à la « somme infinie » de surfaces de sphères de rayon x, avec x variant entre 0 et r.

Si on sait que la surface d'une sphère de rayon x est $4\pi x^2$, alors le volume de la boule est $\int_0^r 4\pi x^2 \mathrm{d}x$, ce qui donne $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Et si on ne connaît pas la surface d'une sphère de rayon x, on peut démontrer d'une autre façon* que le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi r^3$, et donc on a : $\frac{4}{3}\pi r^3 = \int_0^r \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{S}(x)$ est la surface d'une sphère de rayon x. D'après le cours, $\mathrm{S}(x)$ est donc la primitive de $\frac{4}{3}\pi r^3$ qui s'annule en 0, c'est donc $4\pi r^2$.

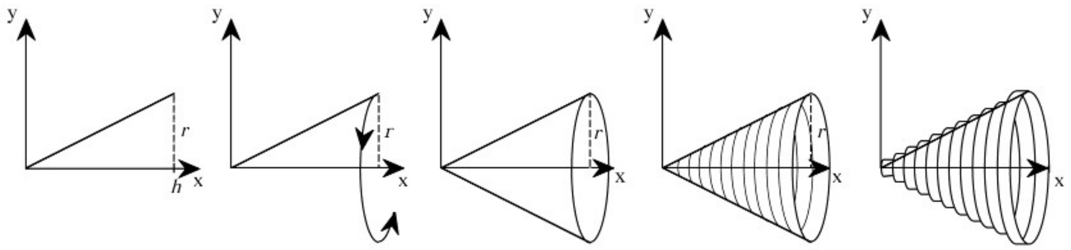
Autrement dit, il est normal que la dérivée du volume d'une boule donne la surface d'une sphère.





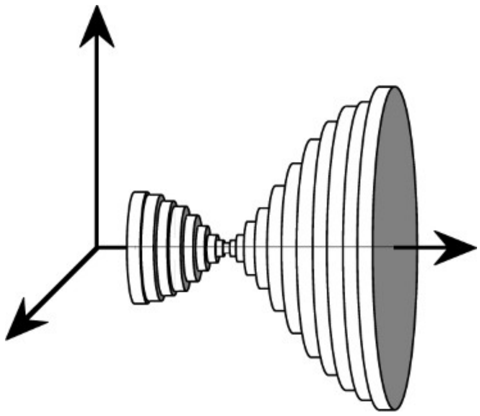
* par exemple en considérant que le volume de la boule est égal à 2 fois celui d'une demi-boule, engendrée par la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, et alors le volume de la boule est :

$$2\int_0^r \pi(f(x))^2\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3 .$$



D'une façon analogue à celle utilisée dans ce cours, on peut calculer le **volume** d'un solide généré par la révolution autour de l'axe Ox d'une portion de courbe d'équation $y=f(x)$ et comprise entre $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 \mathrm{d}x \ .$$



Source des images : http://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/3MRe%20Analyse.pdf

Fichier Geogebra pour s'amuser :

https://www.geogebra.org/m/wwkrqy4q →