SÉANCE DU MARDI 6 AVRIL 2021

I. Cours pages 3 et 4 (démonstrations)

• Faire la démo de la propriété suivante (voir page 3 du cours, démo guidée sous forme d'exercice) :

> Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
>
> La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

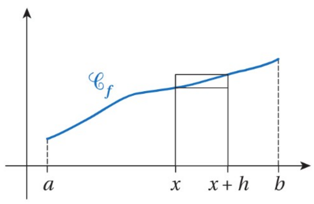
Voici ci-dessous la correction détaillée, mais prenez bien le temps de chercher avant.
Pour ceux qui préfèrent en vidéo avec les explications que j'avais faites à l'oral en classe sur l'importance de cette propriété, ça se passe ici :

https://youtu.be/ENjGUb-ZGtg?t=455 (voir de 7:35 à 11:30).

On suppose ici que f est croissante sur $[a;b]$.

Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x\in[a;b]$. On pose $h\in\mathbb{R}$ avec $h>0$ et $x+h\in[a;b]$.



1. $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. *soustraction de deux aires :*

Or : $\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. f est croissante sur $[a;b]$ donc on peut encadrer $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'aire des deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x)$ et $f(x+h)$: $h\times f(x)\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant h\times f(x+h)$.

3. On a donc : $h\times f(x)\leqslant \mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)\leqslant h\times f(x+h)$.

Donc, puisque $h>0$: $f(x)\leqslant\dfrac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}\leqslant f(x+h)$ (*).

4. f est continue en x donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

5. De (*), on déduit du théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=f(x)$.

Conclusion : F est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'=f$.

• Faire la démo de la propriété suivante (voir page 3 du cours, démo guidée sous forme d'exercice) :

> Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Voici ci-dessous la correction détaillée, mais prenez bien le temps de chercher avant.
Pour ceux qui préfèrent en vidéo, ça se passe ici :
https://youtu.be/ENjGUb-ZGtg?t=732 (voir de 12:12 à 13:47).

> On suppose ici que f est définie et continue sur $[a;b]$ et qu'elle admet un minimum noté m.
> On pose $g(x)=f(x)-m$.
> **1.** La différence de deux fonctions continues sur un intervalle est continue, donc g est continue sur $[a;b]$. Et f admet un minimum m sur $[a;b]$, donc : $\forall x \in [a;b]$, $f(x)\geqslant m$.
> D'où $g(x)\geqslant 0$.
> La fonction g est donc continue et positive sur $[a;b]$.
> **2.** D'après la propriété précédente, G est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{G}'=g$.
> F est une somme de deux fonctions dérivables donc F est dérivable sur $[a;b]$
> et $\mathrm{F}'(x)=g(x)+m=f(x)$.
> Donc F est une primitive de f sur $[a;b]$.

• Lire et comprendre la démo de la propriété suivante (voir page 4 du cours) :

> Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
>
> Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

À bien retenir : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[\mathrm{F}(x)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}$.

II. Cours pages 4, 5 et 6

Bien lire le cours du III. de la page 4 à la page 6 incluse :

→ Lire et comprendre les démonstrations rédigées, et faire celles qui ne le sont pas (normalement, ces dernières sont très simples, mais si problème, n'hésitez pas à me demander lors de la visio à venir).

→ Faire les exemples A1 et A2 dont la correction est dans le manuel scolaire.

S'il y a une question, une partie peu claire ou un exercice dont la correction vous pose problème, vous pourrez poser vos questions lors de la visio obligatoire du mercredi 7 avril qui se tiendra de 10h00 à 12h00.