GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »
René Descartes (1596 - 1650)

I. Représentation en perspective cavalière

La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme des notions premières, c'est-à-dire suffisamment familières pour ne pas les définir. Pour leur étude il sera nécessaire d'admettre un certain nombre de propriétés de base.

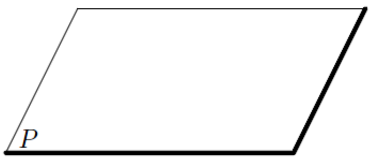
La ***perspective cavalière***[1] est une manière de représenter en deux dimensions des objets en volume. Cette représentation ne présente pas de point de fuite : la taille des objets ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent. Cette perspective ne prétend pas donner l'illusion de ce qui peut être vu, mais simplement donner une information sur la notion de profondeur.

Les règles suivantes doivent être appliquées :

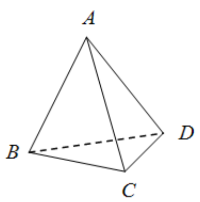
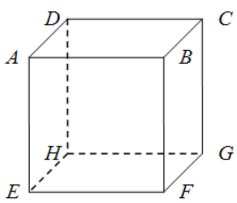
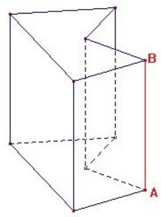
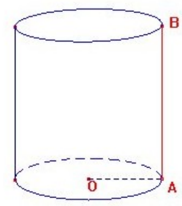
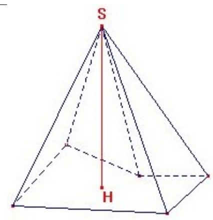
- une figure située dans un plan vu de face (***plan frontal***) est représentée en vraie grandeur;
- le parallélisme, l'alignement, les points de concours, les milieux et les rapports de longueur de segments parallèles sont conservés (autrement dit, deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles, des points alignés sont représentés par des points alignés, le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné, etc.);
- les lignes visibles sont en traits pleins ; les lignes cachées sont en pointillés.
- sauf dans un plan frontal, les angles ne sont pas conservés (remarque : on prend généralement un ***angle de fuite*** compris entre 30° et 60°) et les longueurs sont raccourcies (en général, on utilise un ***coefficient*** 0,5 ou 0,7).

Un plan est un ensemble de points. La feuille de papier est une bonne représentation d'un plan.

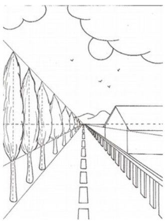
Lorsque l'on veut représenter plusieurs plans de l'espace, on représente chacun d'entre eux par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et qui est illimité « dans tous les sens ».

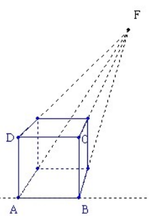


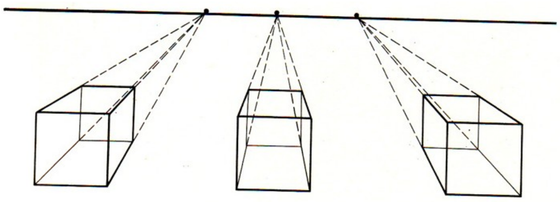
<u>Exemples de représentations en perspective cavalière</u> :

Tétraèdre	Cube	Prisme droit à base pentagonale	Cylindre de révolution	Pyramide à base pentagonale
				

<u>Des représentations en perspective conique</u>, bien connue des dessinateurs :

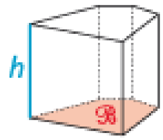
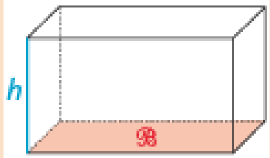
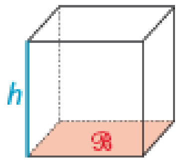
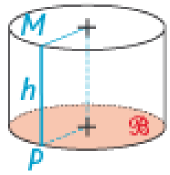
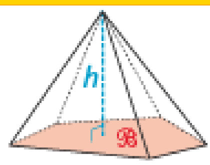
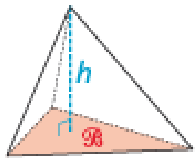
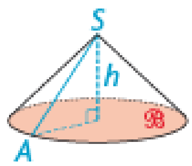
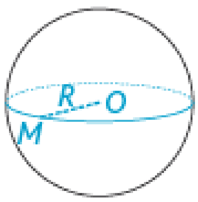






1 **<u>Perspective</u>** : ce mot est issu du latin médiéval *perspectivus*, « relatif à l'optique ». On y reconnaît le verbe latin *perspicere*, « regarder à travers ». **<u>Perspective cavalière</u>** : de l'italien *cavalliere*, qui va à cheval, de *cavallo*, cheval.
L'origine est militaire, et on a dit aussi "perspective militaire" ; il s'agit d'une perspective utilisée dans le dessin d'architecture militaire pour représenter des fortifications. Un cavalier est, en matière de fortification, une construction de terre, élevée, située en arrière d'autres constructions et plus haute qu'elles, de manière à dominer ces autres constructions et même la campagne environnante par où viendront les assaillants. La vue cavalière est alors la vue qu'a sur ces constructions plus basses et cette campagne, un observateur situé sur le haut du cavalier ; la perspective cavalière est le procédé utilisé par le dessinateur de fortifications pour rendre la vue cavalière. *Sources : http://trucsmaths.free.fr et « Les Mots & les Maths » de B. Hauchecorne, éditions Ellipses*

II. Solides usuels et volumes

Nom	Définition	Représentation
Prisme droit	C'est un solide qui a deux faces parallèles qui sont des polygones superposables (appelés **bases**) et dont les autres faces sont des rectangles.	
Pavé droit	*Appelé également parallélépipède rectangle.* C'est un cas particulier de prisme droit, dont les six faces sont des rectangles.	
Cube	C'est un cas particulier de pavé droit, dont les six faces sont des carrés.	
Cylindre de révolution	C'est un solide engendré par la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés. La droite (MP) est appelée **génératrice** du cylindre.	
→ **On calcule le volume de ces solides en multipliant l'aire de la base par la hauteur : $V = \mathcal{B} \times h$.**		
Pyramide	C'est un solide qui a une face polygonale appelée base et dont toutes les autres faces sont des triangles. Elle sera dite **régulière** si la base est un polygone régulier et si sa hauteur passe par le centre de la base.	
Tétraèdre	C'est un cas particulier de pyramide, qui a ses quatre faces triangulaires. Il sera dit **régulier** si ses quatre faces sont des triangles équilatéraux.	
Cône de révolution	C'est le solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. La droite (SA) est appelée **génératrice** du cône.	
→ **On calcule le volume de ces solides en prenant le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur : $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$.**		
Boule	C'est le solide engendré par la rotation d'un disque autour de l'un de ses diamètres. Le segment $[OM]$ est appelé **rayon** de la boule.	
→ **Le volume de la boule de rayon R est donné par $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3$.**		

Source : Maths Repères 2010, Hachette Education

III. Axiomes

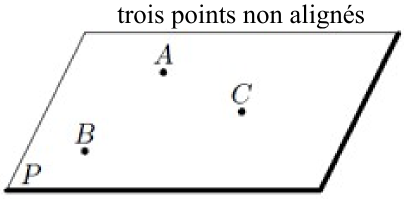
En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les Éléments d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en logique mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie est appelé axiomatique. Cette axiomatique doit être non-contradictoire, c'est sa seule contrainte.

Axiomes d'incidence :

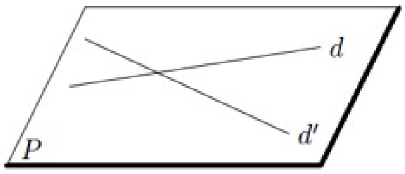
1. Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite, qui peut être notée (AB).
2. Par trois points non alignés A, B et C, il passe un unique plan, qui peut être noté (ABC).
3. Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Un plan peut donc être déterminé par l'une des conditions suivantes :

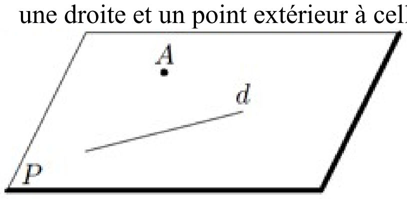
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



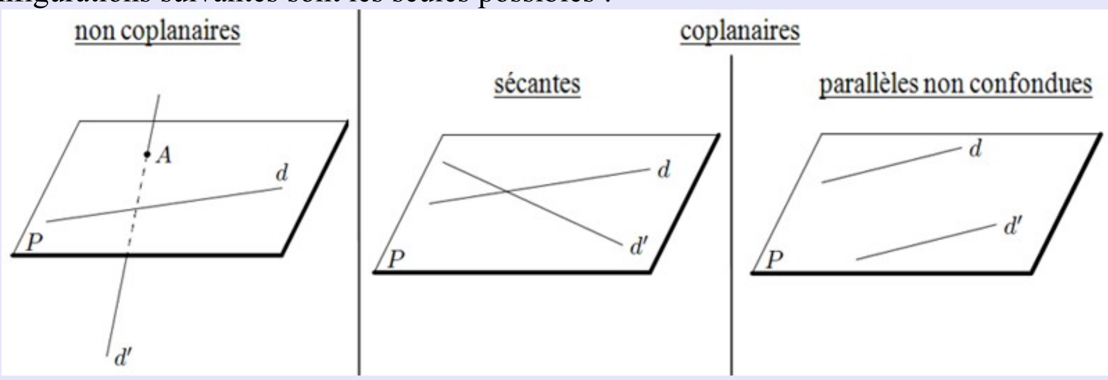
IV. Positions relatives de droites et plans

Propriété : Les résultats de la géométrie plane sont vrais dans n'importe quel plan de l'espace.

IV.1 Positions relatives de deux droites

Définition : deux droites de l'espace sont dites :
- ***coplanaires*** si elles sont contenues dans le même plan;
- ***parallèles*** si elles sont contenues dans le même plan et si elles sont parallèles dans ce plan;
- ***non coplanaires*** s'il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.

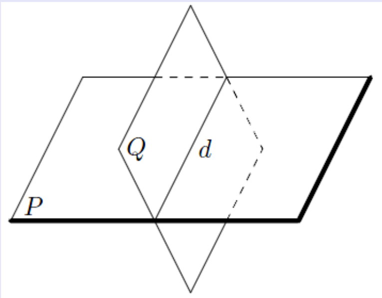
Propriété : Soient d et d' deux droites distinctes.
Les configurations suivantes sont les seules possibles :



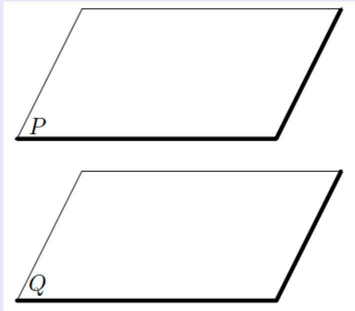
IV.2 Positions relatives de deux plans

Propriété : soient P et Q deux plans distincts.
Les configurations suivantes sont les seules possibles :
a) les plans ont un point commun, alors ils sont .... suivant une droite passant par ce point[2];
b) ils n'ont aucun point commun, alors ils sont ....

....

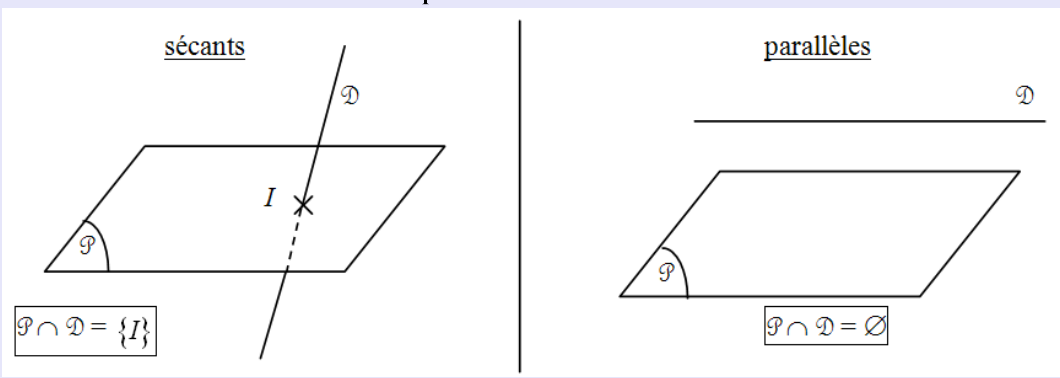


....



IV.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite non incluse dans ce plan.
Les configurations suivantes sont les seules possibles :



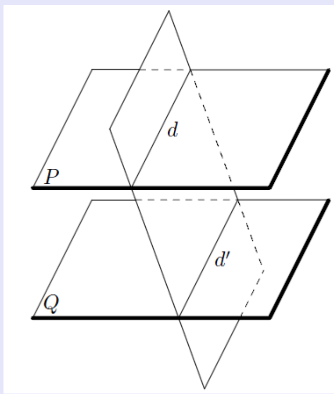
V. Propriétés liées au parallélisme

V.1 Parallélisme entre droites

Propriété : Deux droites parallèles à une même troisième droite sont ....

Propriété :

Si deux plans sont parallèles, alors :
tout plan qui coupe l'un coupe l'autre
et les droites d'intersection ....

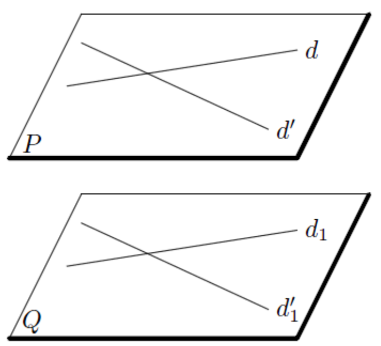


2 Ainsi, deux plans distincts qui ont 2 points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points

V.2 Parallélisme entre plans

Propriété : Deux plans parallèles à un même troisième plan sont ....

Propriété :



Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q,
alors les plans P et Q sont parallèles.

V.3 Parallélisme entre droites et plans

Propriété :

Si une droite d est parallèle à une droite d',
alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d'.