Tle option ME

COMPLÉMENT :
L'EXPONENTIELLE ET LE LOGARITHME COMPLEXES

Dans le cours, nous avons constaté que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{C}$) par $f(x)=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ vérifie les propriétés de la fonction exponentielle réelle : $f(x+x')=f(x)f(x')$ et $f(0)=1$. Nous avons donc introduit une notation : pour tout réel θ, $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x_1 et x_2 : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1+x_2)}$.

Démonstration :

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2}=(\cos x_1+\mathrm{i}\sin x_1)(\cos x_2+\mathrm{i}\sin x_2)=\ldots=\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2+\mathrm{i}(\cos x_1\sin x_2+\cos x_2\sin x_1)$

et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1+x_2)}=\cos(x_1+x_2)+\mathrm{i}\sin(x_1+x_2)=\ldots=\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2+\mathrm{i}(\cos x_1\sin x_2+\cos x_2\sin x_1)$

d'où $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1+x_2)}$.

DÉFINITION

Pour tout nombre complexe z dont la forme algébrique est $x+\mathrm{i}\,y$, on pose : $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.

Autrement dit : $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z))+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(z)))$.

PROPRIÉTÉ

Pour tous complexes z_1 et z_2 : $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$.

Démonstration :

Soient $z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1$ et $z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2$.

$\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}\times\mathrm{e}^{x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}=\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}=\mathrm{e}^{x_1+x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1+y_2)}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$

On démontrerait de même que : $\dfrac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}}=\mathrm{e}^{z_1-z_2}$.

PROPRIÉTÉS

Si $z\in\mathbb{C}$: $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z)=\mathrm{Im}(z)$ [2π].

Démonstrations :

On note $z=x+\mathrm{i}\,y$.

$|\mathrm{e}^z|=|\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|=|\mathrm{e}^x||\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|=\mathrm{e}^x$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$ et $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|=\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y}=1$

$$\begin{aligned}\arg(\mathrm{e}^z)&=\arg(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y})=\arg(\mathrm{e}^x)+\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})\ [2\pi]\\&=0+y\ [2\pi]\\&=y\ [2\pi]\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ

L'ens. solution de l'équation $e^z=1$ d'inconnue complexe z est : $\{2ik\pi,\ k\in\mathbb{R}\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} e^z=1 &\Leftrightarrow |e^z|=1 \text{ et } \arg(e^z)=0\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z)}=1 \text{ et } \mathrm{Im}(z)=0\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0 \text{ et } \mathrm{Im}(z)=0\ [2\pi] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ

Soit $a\in\mathbb{C}^*$ et sa forme exponentielle $re^{i\theta}$.

L'ens. solution de l'équation $e^z=a$ d'inconnue complexe z est : $\{\ln(r)+i(\theta+2k\pi),\ k\in\mathbb{R}\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} e^z=a &\Leftrightarrow e^z=re^{i\theta} \Leftrightarrow e^z=e^{\ln(r)}e^{i\theta} \Leftrightarrow e^z=e^{\ln(r)+i\theta} \Leftrightarrow e^{z-\ln(r)-i\theta}=1 \\ &\Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{R},\ z-\ln(r)-i\theta=2ik\pi \\ &\Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{R},\ z=\ln(r)+i(\theta+2k\pi) \end{aligned}$$

Pour x et a réels avec $a>0$, nous avions : $e^x=a \Leftrightarrow x=\ln(a)$.
Mais d'après la propriété ci-dessus :

tout nombre complexe admet une infinité de logarithmes !

On peut néanmoins définir une fonction logarithme complexe par une méthode élémentaire.
Tout complexe non nul z peut s'écrire $re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $-\pi<\theta\leqslant\pi$ (on appelle θ ***l'argument principal***).
On peut alors poser : $L(z)=\ln(r)+i\theta$.
De plus, si par analogie avec $\ln(1)=0$, on impose que $L(1)=0$:
$L(1)=L(e^0)=\ln(1)+i(0+2k\pi)=2ik\pi$ donc $2ik\pi=0$ donc $k=0$ et donc $L(re^{i\theta})=\ln(r)+i\theta$.
Tout semble donc nous inciter à poser cette définition si l'on veut prolonger la fonction $\ln$ aux complexes.
Pour l'instant, cette fonction L est bien définie sur $\mathbb{C}^*$ et $e^{L(z)}=z$.
On appelle cette fonction la ***détermination principale du logarithme***.

On pourrait donc avoir envie d'appeler $\ln$ ou $\log$ cette fonction L, par analogie avec le logarithme réel.
Mais il faut auparavant s'assurer que L a les mêmes propriétés que $\ln$ ou $\log$.

1) L est-elle continue sur $\mathbb{C}^*$?
La réponse est non… En effet, un réel négatif x a un argument principal égal à π, donc $L(x)=\ln|x|+i\pi$.
Mais si un complexe est « très proche » de ce réel x, par exemple $x'=x-\varepsilon i$ avec $\varepsilon>0$ proche de 0, alors $x'\approx|x|e^{-i\pi}$ donc $L(x')\approx\ln|x|-i\pi$.
C'est pourquoi l'on va restreindre notre fonction L, qui était définie sur $\mathbb{C}^*$, à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.
Autrement dit, notre logarithme complexe est défini sur les complexes privés des réels négatifs.

Cependant, on peut toujours donner un sens à $L(x)$ avec x réel négatif.
En effet, $x=(-x)\times(-1)=(-x)e^{i\pi}$ donc $L(x)=\ln(-x)+i\pi$.

Mais si l'on souhaite une fonction L qui est continue et prolonge certaines propriétés de $\ln$, il faut accepter de considérer la restriction de L à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

2) A-t-on $\mathrm{L}(z_1 z_2)=\mathrm{L}(z_1)+\mathrm{L}(z_2)$ pour tous nombres complexes non nuls z_1 et z_2 ?

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(z_1 z_2)&=\mathrm{L}\left(|z_1 z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z_1 z_2)}\right)=\ln|z_1 z_2|+\mathrm{i}\arg(z_1 z_2)\\&=\ln|z_1|+\ln|z_2|+\mathrm{i}(\arg z_1+\arg z_2+2k\pi)\ \text{ où } k\in\mathbb{R}\\&=\ln|z_1|+\mathrm{i}\arg z_1+\ln|z_2|+\mathrm{i}\arg z_2\ [2\mathrm{i}\pi]\\&=\mathrm{L}(z_1)+\mathrm{L}(z_2)\ [2\mathrm{i}\pi]\end{aligned}$$

L'égalité $\mathrm{L}(z_1 z_2)=\mathrm{L}(z_1)+\mathrm{L}(z_2)$ est donc vraie, mais modulo $2\mathrm{i}\pi$.
Et à condition que $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}^-$ si l'on reprend l'idée d'utiliser une fonction continue qui prolonge $\ln$.

Il est alors facile d'avoir $\mathrm{L}(z^n)=n\mathrm{L}(z)[2\mathrm{i}\pi]$.
Puis, si $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $z^n=a \Leftrightarrow z=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a)}[2\mathrm{i}\pi]$, que l'on peut noter $z=a^{\frac{1}{n}}\ [2\mathrm{i}\pi]$.

3) Pour écrire que $\mathrm{L}'(z)=\dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, il faudrait définir la notion de dérivabilité pour une fonction complexe, ce que je ne ferai pas ici.

Pour en savoir davantage et aller un peu plus loin :
http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.expo.pdf.