Rappels de Première

cours → p.314

9 exercices corrigés → p.315

Rappels sur les fonctions trigo. :

tsm-ft-rap-fb tsm-ft-rap-fb2

tsm-ft-rap-sf

I. Rappels

I.1 Cercle trigonométrique et « enroulement de la droite numérique »

DÉFINITION

« Le » ***cercle trigonométrique*** est un cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le ***sens direct*** (ou ***sens trigonométrique***), c'est-à-dire dans le sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre.

REMARQUE : ce sens a été choisi par les astronomes parce qu'il correspond à la rotation de la Terre ; c'est-à-dire le sens dans lequel les étoiles semblent défiler pour un observateur sur Terre.

DÉFINITION

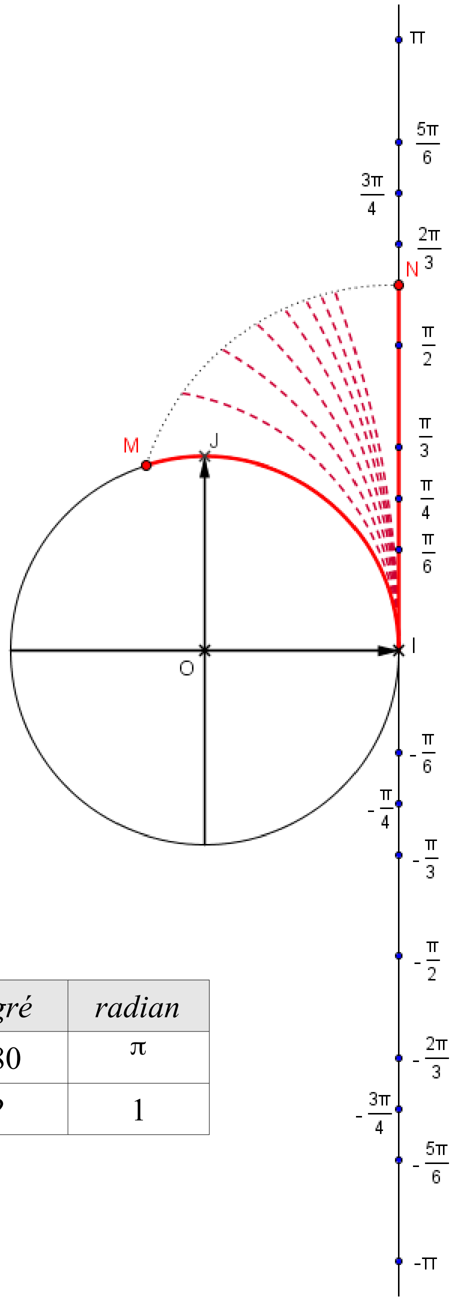
On considère le cercle trigonométrique de centre O et le repère orthonormé $(\mathrm{O};\overrightarrow{\mathrm{OI}};\overrightarrow{\mathrm{OJ}})$.

On note (d) la droite tangente en I à la droite (OI), et on munit cette droite d'un repère $(\mathrm{I};\overrightarrow{\mathrm{IK}})$ tel que $\mathrm{IK}=1$.

Cette droite graduée s'appelle ***droite numérique*** (elle représente ℝ).

À tout nombre réel x on fait correspondre le point N d'abscisse x dans le repère $(\mathrm{I};\overrightarrow{\mathrm{IK}})$ de (d).

Par enroulement de la droite (d) autour du cercle trigonométrique, on obtient un unique point M sur ce cercle. On appelle ***mesure en radian*** de l'angle $\widehat{IOM}$ la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{IM}}$.



REMARQUE : radian vient du latin *radius*, qui signifie rayon.

EXEMPLES C1

- un angle qui mesure 360° mesure 2π radians ;
- un angle qui mesure 60° mesure $\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ radians ;
- un angle qui mesure 1 radian mesure $\dfrac{180}{\pi}\approx 57{,}3$ °.

degré	*radian*
180	π
?	1

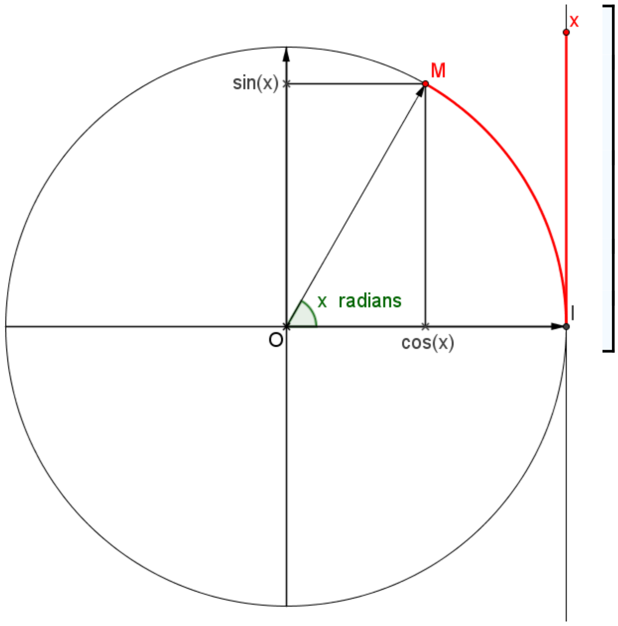
DÉFINITIONS

Soient $(O;\vec{OI};\vec{OJ})$ un repère orthonormé et le cercle trigonométrique de centre O.

On note M le point associé à un réel x par « enroulement de la droite numérique ».

Le ***cosinus de x***, noté **cos *x***, est l'abscisse de M.

Le ***sinus de x***, noté **sin *x***, est l'ordonnée de M.



I.2 C'est comme la trigonométrie dans un triangle rectangle ?

PROPRIÉTÉS

On suppose que $0<x<\frac{\pi}{2}$ (autrement dit que M a une abscisse positive). Alors :

$$\cos x=\cos\widehat{IOM} \text{ et } \sin x=\sin\widehat{IOM}.$$

<u>Démonstration</u> : on note H (cos x ; 0) et K (0 ; sin x).

$\cos\widehat{IOM}=\frac{OH}{OM}$ donc $\cos\widehat{IOM}=OH$ (car $OM=1$). Or, $OH=\cos x$ d'où $\cos x=\cos\widehat{IOM}$.

De même, $\sin x=\sin\widehat{IOM}$.

I.3 Propriétés et valeurs remarquables

PROPRIÉTÉS (ÉVIDENTES)

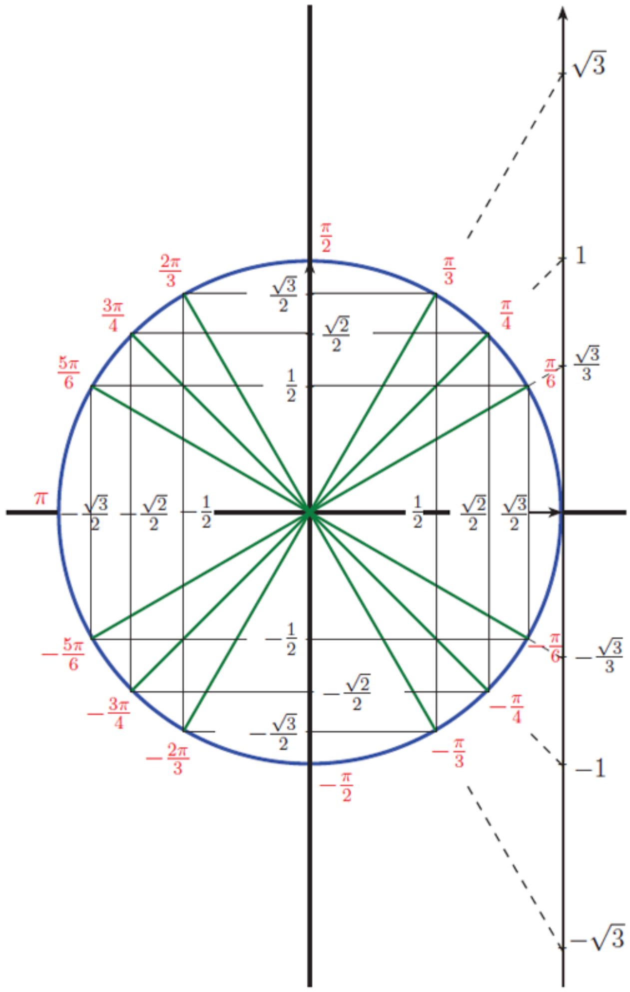
Pour tout réel x : $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

PROPRIÉTÉS VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure de l'angle (en degré)	0	30	45	60	90	180	360
cos x	1						
sin x	0						

<u>Démonstrations</u> : purement géométriques comme au collège.

L'idée est de se placer dans un demi-carré de côté 1 ou demi-triangle équilatéral de côté 1.
Pour quelques démonstrations, voir ici par exemple :
gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/Lycee_fichiers/CoursP_fichiers/trigo.pdf



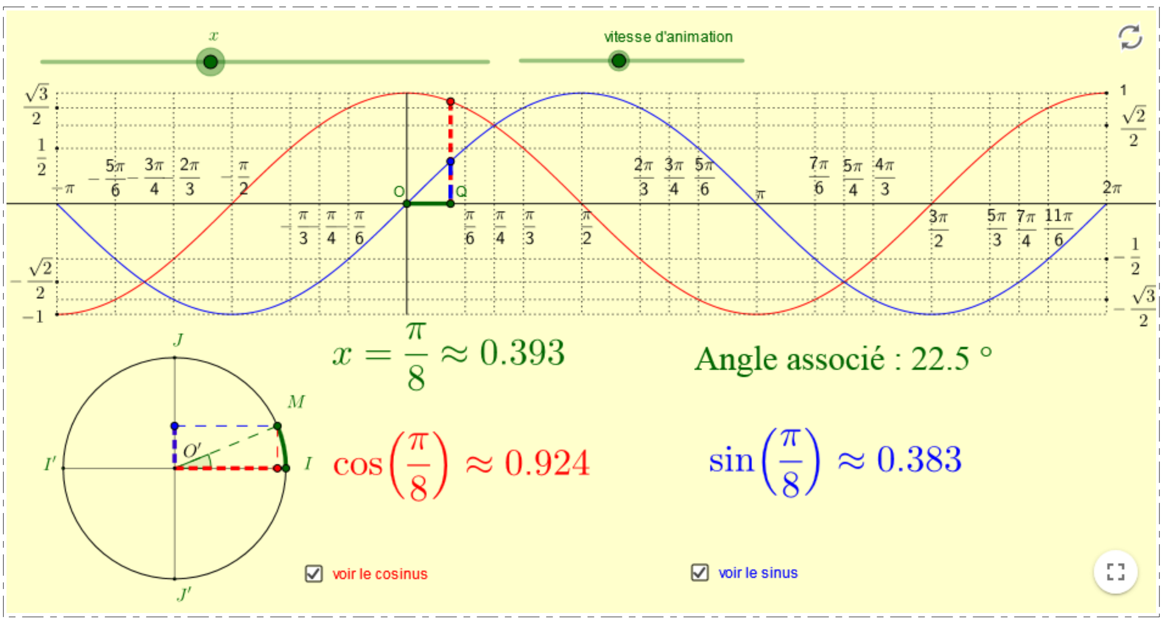
Source : www.lyceeadultes.fr/sitepedagogique/pages/mathTermS.html

PROPRIÉTÉS (ÉVIDENTES)

Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

II. Fonctions trigonométriques cos et sin



Voir https://www.geogebra.org/m/AJWDDNWy

Remarques : on observe que la courbe de la fonction $\sin$ est celle obtenue par la translation de la courbe de la fonction $\cos$ par le vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$. Autrement dit : $\sin(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit alors facilement : $\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\qquad$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$.

PROPRIÉTÉS

- La fonction cos est dérivable en 0 et $\cos'(0)=0$.
- La fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0)=1$.

Démonstrations : propriétés admises, même si accessible (voir approfondissement).

Exemples C2

Calculer, si ces limites existent, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$.

PROPRIÉTÉS

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'=-\sin$.
- La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'=\cos$.

Démonstration :

• Commençons par admettre les deux formules suivantes, vues en Tle option maths expertes :
$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$.
La démonstration est facile et utilise le produit scalaire. Voir mathemathieu.fr/378.

• Soit $(x;h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}=\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\sin(x)$.

• De même pour montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos(x)$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

- Fiche bilan → p.322
- QCM 15 questions corrigées → p.323
- Exercices corrigés → 29 à 37 p.324

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : tsm-ft-ym

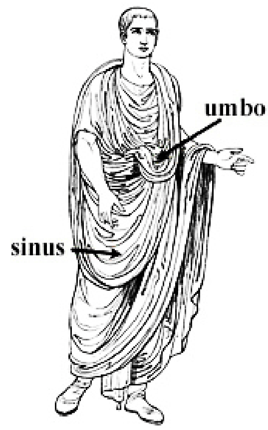
HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : SINUS DU FRONT ? ET À QUOI ÇA SERT ?

Y a-t-il un rapport entre la fonction sinus et les sinus du front ?

Oui et non… Le mot « sinus » est un mot latin signifiant « courbe, pli, cavité ».
Il a donné en français les mots « sein » (d'ailleurs, en italien, le sinus mathématique se dit *seno*, qui signifie aussi « sein ») et « sinueux ». Mais si les sinus du front forment bien des cavités, l'interprétation selon laquelle le sinus mathématique s'appellerait ainsi car une sinusoïde est sinueuse est un contresens, car la notion de représentation d'une fonction est bien plus récente que celle de sinus !
Voici l'histoire probable du mot « sinus », qui vient d'une erreur de traduction.

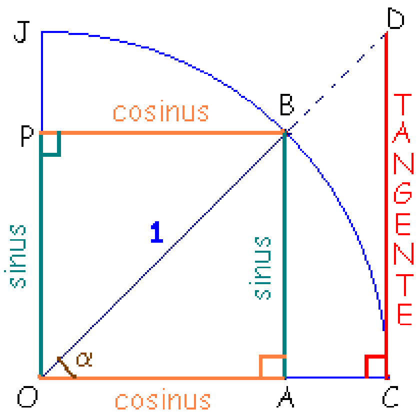
<u>Premier temps</u> : le mathématicien indien Âryabhata (VIe siècle) utilise le mot *ardha-jya* qui signifie « demi-corde » (voir plus loin), et qui sera raccourci en *jya*.

<u>Deuxième temps</u> : invasion de l'Inde par les musulmans.
Découvrant l'œuvre d'Aryabatha, les arabes s'empressent de le traduire dans leur langue. Le terme *jya* est donc traduit phonétiquement en arabe par le mathématicien Al-Fazzârî (VIIIe siècle) pour devenir *jiba*, un mot sans signification. Or, l'arabe étant une langue sémitique (Une langue sémitique ne s'écrit qu'avec des consonnes ; pour savoir quelles voyelles ajouter dans un mot afin de le rendre prononçable, il faut se baser sur le contexte de la discussion), ce mot est écrit *jb*.
Il sera alors confondu avec le mot *jaib* qui, lui, signifie « poche ».



<u>Troisième temps</u> : Gérard de Crémone (XIIe siècle, vers l'an 1150) confond *jîba* avec *jaib*, qui signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par *sinus*…
En effet, les toges romaines étaient formées d'un grand drap que l'on ajustait autour du corps de façon à former un pli sous le bras droit. Ce pli est précisément le *sinus* de la toge et jouait le rôle d'une poche (un creux dans lequel on pouvait placer de petits objets).

Quant au **cosinus**, c'est tout simplement **le sinus du complémentaire** (de l'angle) :
« co- » vient du latin *cum*, qui signifie « avec ».

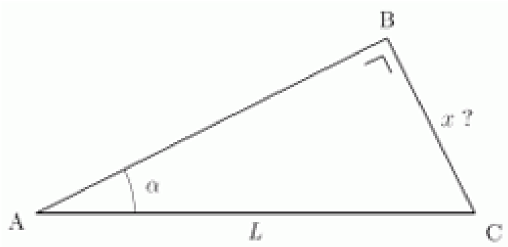


← La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.

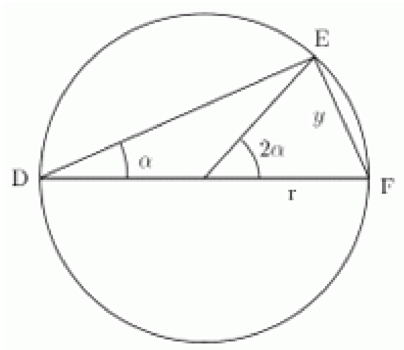
Sources : mapage.noos.fr/r.ferreol/langage/notations/notations.htm et cer1se.free.fr/principia/index.php/gros-plan-sur-le-sinus/print/

D'accord… Mais pourquoi « demi-corde » ?

Aryabatha s'intéressait au problème de calculer, dans un triangle rectangle, la longueur x d'un côté adjacent à l'angle droit en connaissant l'angle opposé α et un autre côté L :



Or il était connu, depuis Euclide, que le milieu du côté L est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle. Si on trace un angle 2α au centre d'un cercle de rayon quelconque r, et qu'on en tire le triangle inscrit DEF comme ci-dessous :



on a que DEF est semblable au triangle ABC de la première figure. On en déduit la relation :

$$\frac{x}{L}=\frac{y}{2r}=\frac{\text{corde}(2\alpha)}{2r}$$

ou encore :

$$x=\frac{L}{r}\times\frac{\text{corde}(2\alpha)}{2}$$

Aryabatha va mettre l'accent sur la quantité

$$\frac{\text{corde}(2\alpha)}{2}$$

qui n'est autre que notre sinus actuel si r = 1. Cependant, il choisit une autre valeur pour le rayon. Le cercle chez Aryabatha est divisé en 360 x 60 = 21600 arcs de 1′, qu'il prend comme unité de longueur. On a :

$$2\pi r = 21600$$

où π = 3,1416 chez Aryabatha, comme on l'a vu précédemment. Ceci nous donne la valeur approximative du rayon utilisé : r = 3438. Il faudra attendre le 10e siècle pour que le mathématicien perse Abul Wafa décide d'utiliser un cercle de rayon 1, ce qui donnera la version définitive du sinus (et de ses quantités dérivées comme le cosinus et la tangente).

La longueur associée à un angle est donc la demi-corde du double de l'angle.

Source : cer1se.free.fr/principia/index.php/gros-plan-sur-le-sinus/print/

À quoi ça sert ces trucs ?

On a créé les fonctions cos et sin à partir d'un cercle et d'un point en mouvement sur ce cercle...

Or, des systèmes rotatifs, il y en a partout : les pales d'une hélice, les roues d'une voiture ou d'un vélo, l'axe d'un moteur, l'aimant dans une dynamo, la Terre qui tourne sur elle-même, la Terre qui tourne autour du Soleil…

De plus, les fonctions trigonométriques ressemblent à des vagues : les ondes et les vagues obéissent également à des fonctions sinusoïdales (ondes sonores, électromagnétiques, etc.).

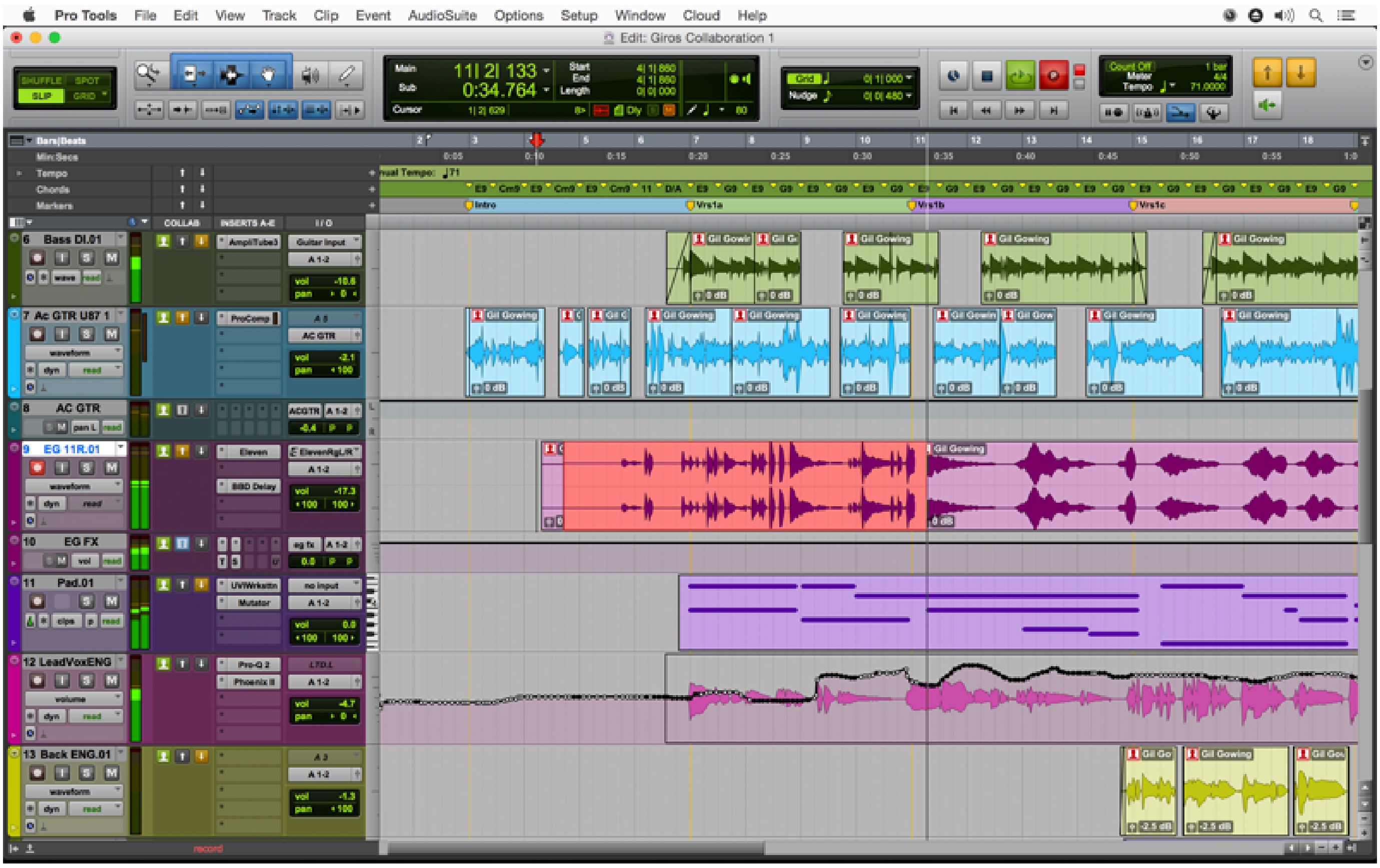
Les fonctions trigonométriques se retrouvent donc un peu dans ***tous les domaines de la physique et de la science en général***.

Comme les dérivées, donc, la trigonométrie non plus n'est pas juste un « délire de matheux » : elle a une origine géométrique basée sur un cercle (ou une hyperbole, dans le cas de la trigonométrie hyperbolique, voir ci-dessous), et se retrouve donc dans tous les systèmes impliquant des cercles, des roues, des sphères en rotation.

Tout signal, vérifiant certaines propriétés, peut être décrit par une somme (généralement infinie) de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences : c'est l'idée de base de l'***analyse de Fourier***, dans laquelle les séries trigonométriques sont utilisées pour résoudre de nombreux problèmes aux valeurs limites dans des équations aux dérivées partielles.

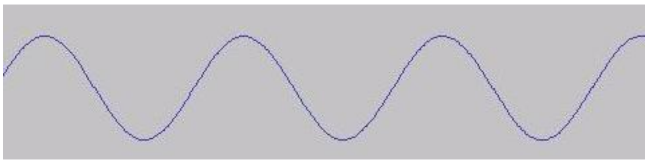
Un exemple très connu : les ondes sonores

Lorsque vous ouvrez un fichier sonore sur votre ordinateur, il y a souvent un logiciel qui s'ouvre et affiche des ondes, qui battent en rythme selon la musique écoutée…
Ceux qui font de la Musique Assistée par Ordinateur (M.A.O.) voient des ondes partout :



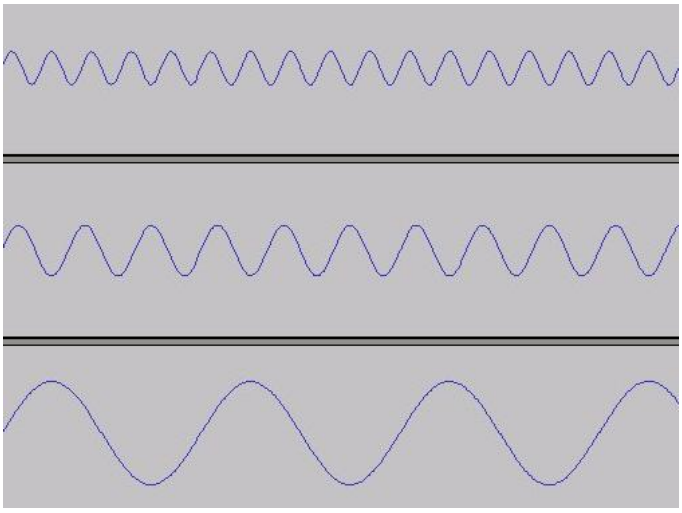
Quelques explications sur les harmoniques…

Un son parfaitement sinusoïdal et sans aucun harmonique (« pur ») ressemble à ça, vu à l'oscilloscope :

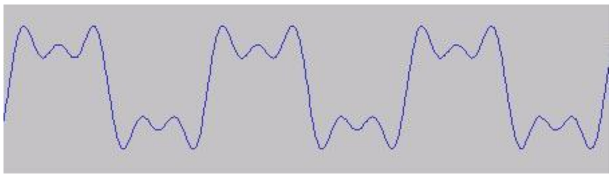


et sonne comme ça : http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_sin.wav

Le même avec 2 harmoniques aux fréquences 3 et 5 :

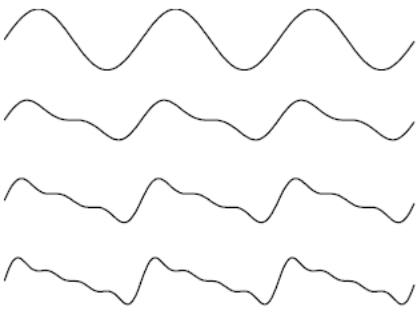


Les mêmes, réunis en un son unique :

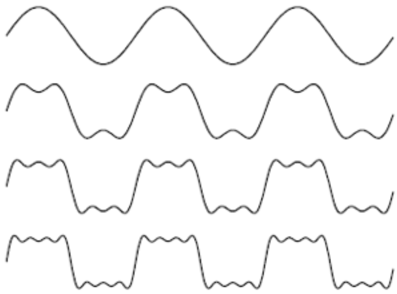


qui sonne ainsi :
http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_timbre.wav

Autre exemple :



ajout des harmoniques 1, 2, 3, 4
(modèle simplifié d'un son de violon)



ajout des harmoniques 1, 3, 5, 7
(modèle simplifié d'un son de clarinette)

Un son pur, et ce même son auquel on ajoute ses harmoniques de rang 2, 3 et 4 :
https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/ajoutharm1.wav

Un son pur, et ce même son auquel on ajoute ses harmoniques de rang 3, 5 et 7 :
https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/ajoutharm2.wav

Le signal en "dents de scie", une des formes d'ondes fréquemment utilisées pour la synthèse sonore, a pour expresion :

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left[2\pi k \mathrm{F} t + (k-1)\pi\right]}{k} \quad \text{avec} \quad n \to +\infty$$

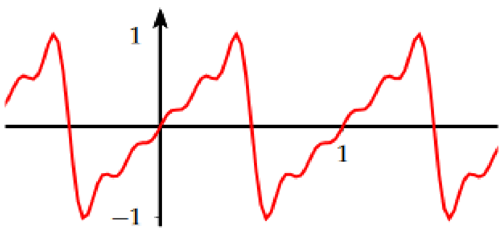
Si on s'intéresse aux 5 premières harmoniques avec une fréquence fondamentale $\mathrm{F} = 1$, on a alors la fonction f_6 :

$$f_5(t) = \frac{2}{\pi}\left[\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t + \pi) + \frac{1}{3}\sin(6\pi t) + \frac{1}{4}\sin(8\pi t + \pi) + \frac{1}{5}\sin(10\pi t)\right]$$

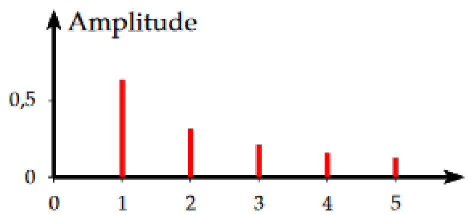
On observe que deux harmoniques successives sont en opposition de phase.

Si on trace la fonction f_5, on observe clairement une courbe qui ressemble à une courbe en "dent de scie". En ajoutant une douzaine d'autres termes, on obtiendrait alors une meilleure approximation.

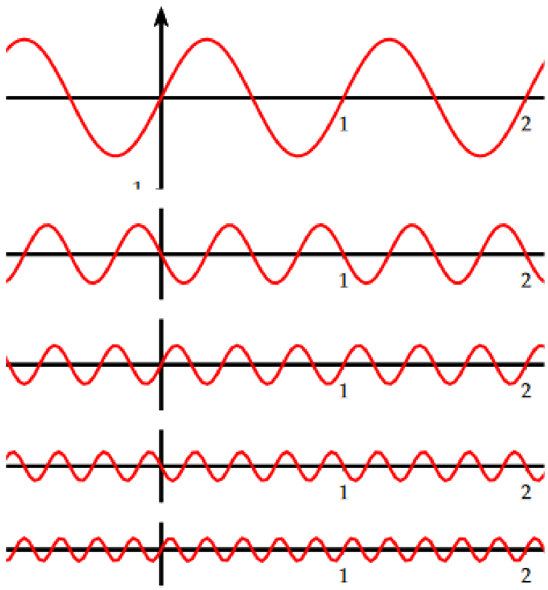
On observe alors la superposition des 5 harmoniques ainsi que le spectre de fréquence



Signal en dent de scie
(5 premières harmoniques)

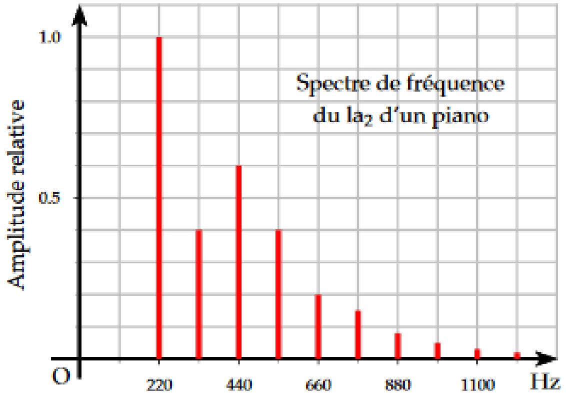


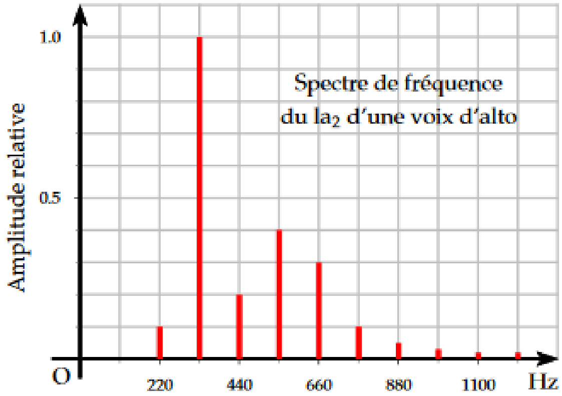
Amplitude des harmoniques



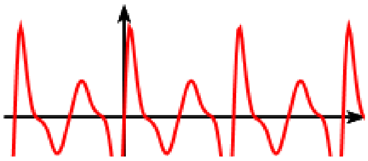
Deux instruments jouant la même note sont reconnaissables par le timbre : assemblage unique d'harmoniques. Une note produit par un piano a un spectre de fréquence très différent de celle d'un chanteur et l'oreille distingue facilement le chanteur de l'accompagnement piano.

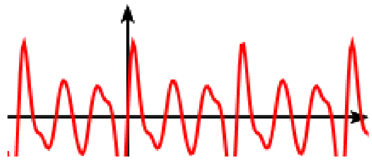
Remarque : La deuxième harmonique correspond à l'octave ($F_2 = 2F$) et la troisième à la quinte ($F_3 = 3F$)

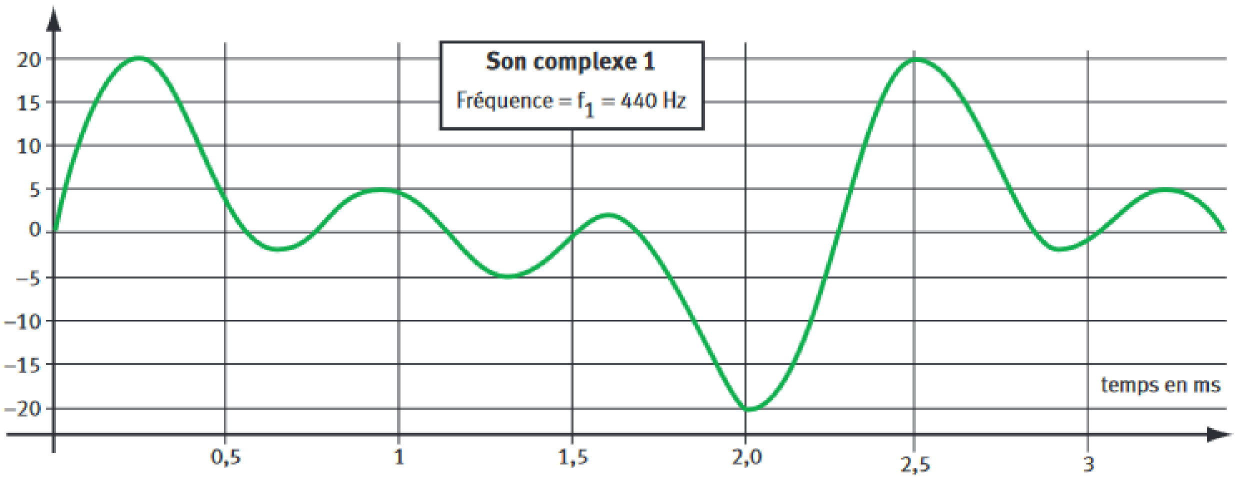




On obtient les profils suivants des ondes produites par le piano et par une voix d'alto :







Remarque : beaucoup des extraits ci-dessus sont tirés de cours de Paul Milan sur www.academie-en-ligne.fr.

À lire : un complément de 24 pages que j'ai écrit et qui fait le lien entre la suite harmonique $\left(\frac{1}{n}\right)$ et la création historique / la théorie des notes de musique…

C'est loin d'être aussi simple qu'on le pense, et c'est passionnant :

mathemathieu.fr/453