

## Exercice 1

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2} \text{ donc } F(x) = 3 \frac{x^2}{2} - x - 2 \times \frac{1}{x} + k \text{ ie } F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x} + k.$$

$$F(1) = 0 \text{ donc } \frac{3}{2} - 1 - 2 + k = 0 \text{ donc } k = \frac{3}{2} : F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}.$$

## Exercice 2

On notera ici, si  $f$  est la fonction à étudier,  $f_p$  une de ses primitives.

$$\bullet a(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x} \text{ sur } ]0; +\infty[$$

$$a_p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)$$

$$\bullet b(x) = \frac{3}{3x-4} \text{ sur } \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$$

$$b_p(x) = \ln(|3x-4|) = \ln(3x-4)$$

$$\bullet c(x) = e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$c(x) = -(-1 \times e^{-x}) \text{ donc } c_p(x) = -e^{-x}$$

$$\bullet d(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$d_p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\bullet e(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur } ]0; +\infty[$$

$$e_p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$$

$$\bullet f(x) = 2x + 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_p(x) = x^2 + x$$

$$\bullet g(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$g_p(x) = 10 \frac{x^5}{5} + 6 \frac{x^4}{4} - x = 2x^5 + \frac{3}{2}x^4 - x$$

$$\bullet h(x) = (x-1)(x+3) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$h(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ donc } h_p(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

$$\bullet i(x) = -\frac{4}{3x^5} \text{ sur } ]0; +\infty[$$

$$i(x) = -\frac{4}{3}x^{-5} \text{ donc } i_p(x) = -\frac{4}{3-4} \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{x^{-4}}{3} = \frac{1}{3x^4}$$

$$\bullet j(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur } ]0; +\infty[$$

$$j_p(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$$

$$\bullet k(x) = 3(3x+1)^4 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$k$  est de la forme  $u'u^4$  donc  $k_p = \frac{1}{5}u^5$  :

$$k_p(x) = \frac{1}{5}(3x+1)^5$$

$$\bullet l(x) = 16(4x-1)^3 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$l(x) = 4 \times 4(4x-1)^3$$

donc  $l$  est de la forme  $4u'u^3$

donc  $l_p = 4 \times \frac{1}{4}u^4 = u^4$  :

$$l_p(x) = (4x-1)^4$$

$$\bullet m(x) = \frac{4}{(1+4x)^2} \text{ sur } \left] -\infty; -\frac{1}{4} \right[$$

$m$  est de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  donc  $m_p = -\frac{1}{u}$  :

$$m_p(x) = \frac{-1}{1+4x}$$

$$\bullet n(x) = \frac{6}{(2x+1)^2} \text{ sur } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$n(x) = 3 \times \frac{2}{(2x+1)^2}$$

donc  $n$  est de la forme  $3 \frac{u'}{u^2}$

donc  $n_p = 3 \times \frac{-1}{u} = \frac{-3}{u}$  :

$$n_p(x) = \frac{-3}{2x+1}$$

- $o(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$  sur  $\mathbb{R}$   
 $o$  est de la forme  $u'u^5$  donc  $o_p = \frac{1}{6}u^6$  :

$$o_p(x) = \frac{1}{6}(3x^2-2x+3)^6$$

- $p(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$  sur  $]-\frac{3}{4}; +\infty[$

$$p(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{(4x+3)^2}$$

donc  $p$  est de la forme  $\frac{1}{4} \times \frac{u'}{u^2}$

donc  $p_p = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{-1}{4u}$  :

$$p_p(x) = \frac{-1}{4(4x+3)} = \frac{-1}{16x+12}$$

- $q(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$  sur  $]\frac{4}{3}; +\infty[$

$q$  ressemble presque à  $\frac{u'}{u^2}$ , on souhaiterait donc

avoir  $\frac{-3}{(4-3x)^2}$ . Faisons-le apparaître :

$$q(x) = \frac{2}{-3} \times \frac{-3}{(4-3x)^2}$$

donc  $q = \frac{2}{-3} \times \frac{u'}{u^2}$  d'où  $q_p = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{u}$

donc  $q_p(x) = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{4-3x} = \frac{2}{3(4-3x)} = \frac{2}{12-9x}$

- $r(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$  sur  $]-\infty; 0[$

$$r(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$$

donc  $r$  est de la forme  $-u'u^4$

donc  $r_p = -\frac{1}{5}u^5$  :  $r_p(x) = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$

- $s(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$  sur  $]2; 3[$

$$s(x) = 2 \times \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}$$

donc  $s$  est de la forme  $2 \frac{u'}{u^2}$

donc  $s_p = 2 \times \frac{-1}{u}$  :

$$s_p(x) = 2 \frac{-1}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x^2-5x+6}$$

- $t(x) = \frac{5}{(2x+1)^3}$  sur  $I = ]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$t(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^3}$$

donc  $t$  est de la forme  $\frac{5}{2} \frac{u'}{u^3} = \frac{5}{2} u' u^{-3}$

donc  $t_p = \frac{5}{2} \times \frac{1}{-2} u^{-2} = -\frac{5}{4u^2}$  :

$$t_p(x) = -\frac{5}{4(2x+1)^2}$$

- $u(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

$$u(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

donc  $u$  est de la forme  $v'v$

donc  $u_p = \frac{1}{2}v^2 = \frac{v^2}{2}$  :

$$u_p(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

- $v(x) = \sqrt{e^{-3x}}$  sur  $\mathbb{R}$

$$v(x) = (e^{-3x})^{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{3} \times \frac{-3}{2} e^{-\frac{3}{2}x}$$

donc  $v$  est de la forme  $\frac{-2}{3} u' e^u$

donc  $v_p = \frac{-2}{3} e^u$  :  $v_p(x) = \frac{-2}{3} e^{-\frac{3}{2}x}$

- $w(x) = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$  sur  $]-2; +\infty[$

$$w(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

donc  $w$  est de la forme  $6 \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc  $w_p = 6\sqrt{u}$  :  $w_p(x) = 6\sqrt{x+2}$

- $M(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$  sur  $\mathbb{R}$

$$M \text{ est de la forme } \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

donc  $M_p = 2\sqrt{u}$  :  $M_p(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$

- $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$  sur  $]1; +\infty[$

$$y(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \text{ donc } y \text{ est de la forme } \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

donc  $y_p = \sqrt{u}$  :  $y_p(x) = \sqrt{x^2-1}$

- $z(x) = 3e^{-4x}$  sur  $\mathbb{R}$   
 $z(x) = \frac{3}{-4} \times (-4)e^{-4x}$

donc  $z$  est de la forme  $\frac{3}{-4}u'e^u$

donc  $z_p = \frac{3}{-4}e^u$  :  $z_p(x) = -\frac{3}{4}e^{-4x}$

- $A(x) = \frac{1}{4}e^x$  sur  $\mathbb{R}$

$A_p(x) = A(x)$

- $B(x) = \frac{1}{3x-5}$  sur  $]-\infty; \frac{5}{3}[$

$B(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5}$

donc  $B$  est de la forme  $\frac{1}{3} \frac{u'}{u}$

donc  $B_p = \frac{1}{3} \ln(|u|)$  :

$B_p(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|)$

or, sur  $]-\infty; \frac{5}{3}[$ ,  $3x-5 < 0$  (à démontrer)

donc  $B_p(x) = \frac{1}{3} \ln(-3x+5)$

- $C(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$  sur  $\mathbb{R}$

$C(x) = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

donc  $C$  est de la forme  $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$

donc  $C_p = \frac{1}{2} \ln(|u|)$  :  $C_p(x) = \frac{1}{2} \ln(|x^2+2x+2|)$

or,  $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$  donc  $x^2+2x+2 > 0$  :

$C_p(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2)$

- $D(x) = xe^{x^2}$  sur  $\mathbb{R}$

$D(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$

donc  $D$  est de la forme  $\frac{1}{2}u'e^u$

donc  $D_p = \frac{1}{2}e^u$  :  $D_p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

- $E(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  sur  $\mathbb{R}$

$E$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  donc  $E_p = \ln(|u|)$  :

$E_p(x) = \ln(|e^x+1|) = \ln(e^x+1)$  (car  $e^x+1 > 0$ )

- $F(x) = \frac{x}{x^2-1}$  sur  $]-1; 1[$

$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1}$

donc  $F$  est de la forme  $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$

donc  $F_p = \frac{1}{2} \ln(|u|)$  :

$F_p(x) = \frac{1}{2} \times \ln(|x^2-1|)$

or  $x^2-1 < 0$  sur  $]-1; 1[$  (à démontrer)

donc  $F_p(x) = \frac{1}{2} \times \ln(1-x^2)$

- $G(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$  sur  $]1; +\infty[$

$G(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln(x)}$

donc  $G$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$

donc  $G_p = \ln(|u|)$  :  $G_p(x) = \ln(|\ln(x)|)$

or,  $\ln(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$  (à démontrer)

donc  $G_p(x) = \ln(\ln(x))$

- $H(x) = e^{-2x+3}$  sur  $\mathbb{R}$

$H(x) = \frac{1}{-2} \times (-2)e^{-2x+3}$

donc  $H$  est de la forme  $\frac{1}{-2}u'e^u$

donc  $H_p = \frac{1}{-2}e^u$  :  $H_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

- $I(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$  sur  $]-\infty; 0[$

$I_p(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ln(|x|)$

or  $|x| = -x$  sur  $]-\infty; 0[$  donc

$I_p(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \ln(-x)$

- $J(x) = xe^{-x^2}$  sur  $\mathbb{R}$

$$J(x) = \frac{1}{-2} \times (-2x) e^{-x^2}$$

donc  $J$  est de la forme  $\frac{1}{-2} u' e^u$

donc  $J_p = \frac{1}{-2} e^u$  :  $J_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

- $K(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$

$$K_p(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

- $L(x) = \frac{1}{4x}$  sur  $] -\infty; 0[$

$$L(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{4x}$$

donc  $L$  est de la forme  $\frac{1}{4} \frac{u'}{u}$

donc  $L_p = \frac{1}{4} \ln(|u|)$  :  $L_p(x) = \frac{1}{4} \ln(|4x|)$

or  $4x < 0$  sur  $] -\infty; 0[$

donc  $L_p(x) = \frac{1}{4} \ln(-4x)$

### Exercice 3

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2}$$

On cherche à écrire  $f(x)$  sous la forme  $ax + b + \frac{c}{x - 2}$ .

En simplifiant, on aurait donc  $f(x) = \frac{ax^2 + (-2a + b)x - 2b + c}{x - 2}$  et donc, par identification (à faire) :

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -2.$$

D'où :  $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x - 2}$ .

Une primitive de  $f$  est alors :  $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(|x - 2|)$

Or  $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$  donc sur  $[4; +\infty[$  :  $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(x - 2)$ .