PRIMITIVES : EXERCICES

Exercice 1

$f(x)=3x-1+\frac{2}{x^2}$ donc $\mathrm{F}(x)=3\frac{x^2}{2}-x-2\times\frac{1}{x}+k$ *ie* $\mathrm{F}(x)=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{2}{x}+k$.

$\mathrm{F}(1)=0$ donc $\frac{3}{2}-1-2+k=0$ donc $k=\frac{3}{2}$: $\mathrm{F}(x)=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}$.

Exercice 2

On notera ici, si f est la fonction à étudier, f_p une de ses primitives.

- $a(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$a_p(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+\ln(x)$

- $b(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

$b_p(x)=\ln(|3x-4|)=\ln(3x-4)$

- $c(x)=\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

$c(x)=-(-1\times\mathrm{e}^{-x})$ donc $c_p(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

- $d(x)=1-x+x^2-x^3$ sur $\mathbb{R}$

$d_p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

- $\mathrm{e}(x)=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

$\mathrm{e}_p(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}$

- $f(x)=2x+1$ sur $\mathbb{R}$

$f_p(x)=x^2+x$

- $g(x)=10x^4+6x^3-1$ sur $\mathbb{R}$

$g_p(x)=10\frac{x^5}{5}+6\frac{x^4}{4}-x=2x^5+\frac{3}{2}x^4-x$

- $h(x)=(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$

$h(x)=x^2+2x-3$ donc $h_p(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$

- $i(x)=-\frac{4}{3x^5}$ sur $]0;+\infty[$

$i(x)=-\frac{4}{3}x^{-5}$ donc $i_p(x)=-\frac{4}{3}\frac{x^{-4}}{-4}=\frac{x^{-4}}{3}=\frac{1}{3x^4}$

- $j(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

$j_p(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$

- $k(x)=3(3x+1)^4$ sur $\mathbb{R}$

k est de la forme $u'u^4$ donc $k_p=\frac{1}{5}u^5$:

$k_p(x)=\frac{1}{5}(3x+1)^5$

- $l(x)=16(4x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

$l(x)=4\times4(4x-1)^3$

donc l est de la forme $4u'u^3$

donc $l_p=4\times\frac{1}{4}u^4=u^4$:

$l_p(x)=(4x-1)^4$

- $m(x)=\frac{4}{(1+4x)^2}$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$

m est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ donc $m_p=-\frac{1}{u}$:

$m_p(x)=\frac{-1}{1+4x}$

- $n(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}$ sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$n(x)=3\times\frac{2}{(2x+1)^2}$

donc n est de la forme $3\frac{u'}{u^2}$

donc $n_p=3\times\frac{-1}{u}=\frac{-3}{u}$:

$n_p(x)=\frac{-3}{2x+1}$

- $o(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ sur $\mathbb{R}$

o est de la forme $u'u^5$ donc $o_p=\frac{1}{6}u^6$:

$o_p(x)=\frac{1}{6}(3x^2-2x+3)^6$

- $p(x)=\frac{1}{(4x+3)^2}$ sur $\left]-\frac{3}{4};+\infty\right[$

$p(x)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{(4x+3)^2}$

donc p est de la forme $\frac{1}{4}\times\frac{u'}{u^2}$

donc $p_p=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{u}\right)=\frac{-1}{4u}$:

$p_p(x)=\frac{-1}{4(4x+3)}=\frac{-1}{16x+12}$

- $q(x)=\frac{2}{(4-3x)^2}$ sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

q ressemble presque à $\frac{u'}{u^2}$, on souhaiterait donc avoir $\frac{-3}{(4-3x)^2}$. Faisons-le apparaître :

$q(x)=\frac{2}{-3}\times\frac{-3}{(4-3x)^2}$

donc $q=\frac{2}{-3}\times\frac{u'}{u^2}$ d'où $q_p=\frac{2}{-3}\times\frac{-1}{u}$

donc $q_p(x)=\frac{2}{-3}\times\frac{-1}{4-3x}=\frac{2}{3(4-3x)}=\frac{2}{12-9x}$

- $r(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$ sur $]-\infty;0[$

$r(x)=-\frac{-1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$

donc r est de la forme $-u'u^4$

donc $r_p=-\frac{1}{5}u^5$: $r_p(x)=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5$

- $s(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ sur $]2;3[$

$s(x)=2\times\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}$

donc s est de la forme $2\frac{u'}{u^2}$

donc $s_p=2\times\frac{-1}{u}$:

$s_p(x)=2\frac{-1}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x^2-5x+6}$

- $t(x)=\frac{5}{(2x+1)^3}$ sur $\mathrm{I}=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$t(x)=\frac{5}{2}\times\frac{2}{(2x+1)^3}$

donc t est de la forme $\frac{5}{2}\frac{u'}{u^3}=\frac{5}{2}u'u^{-3}$

donc $t_p=\frac{5}{2}\times\frac{1}{-2}u^{-2}=-\frac{5}{4u^2}$:

$t_p(x)=-\frac{5}{4(2x+1)^2}$

- $u(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$u(x)=\frac{1}{x}\times\ln(x)$

donc u est de la forme $v'v$

donc $u_p=\frac{1}{2}v^2=\frac{v^2}{2}$:

$u_p(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$

- $v(x)=\sqrt{\mathrm{e}^{-3x}}$ sur $\mathbb{R}$

$v(x)=(\mathrm{e}^{-3x})^{\frac{1}{2}}=\frac{-2}{3}\times\frac{-3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$

donc v est de la forme $\frac{-2}{3}u'\mathrm{e}^u$

donc $v_p=\frac{-2}{3}\mathrm{e}^u$: $v_p(x)=\frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$

- $w(x)=\frac{3}{\sqrt{x+2}}$ sur $]-2;+\infty[$

$w(x)=6\times\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

donc w est de la forme $6\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $w_p=6\sqrt{u}$: $w_p(x)=6\sqrt{x+2}$

- $\mathrm{M}(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur $\mathbb{R}$

M est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

donc $\mathrm{M}_p=2\sqrt{u}$: $\mathrm{M}_p(x)=2\sqrt{x^2+x+1}$

- $y(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1;+\infty[$

$y(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$ donc y est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $y_p=\sqrt{u}$: $y_p(x)=\sqrt{x^2-1}$

- $z(x)=3\mathrm{e}^{-4x}$ sur $\mathbb{R}$

$z(x)=\frac{3}{-4}\times(-4)\mathrm{e}^{-4x}$

donc z est de la forme $\frac{3}{-4}u'\mathrm{e}^{u}$

donc $z_p=\frac{3}{-4}\mathrm{e}^{u}$: $z_p(x)=-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-4x}$

- $\mathrm{A}(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{A}_p(x)=\mathrm{A}(x)$

- $\mathrm{B}(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $\left]-\infty;\frac{5}{3}\right[$

$\mathrm{B}(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x-5}$

donc B est de la forme $\frac{1}{3}\frac{u'}{u}$

donc $\mathrm{B}_p=\frac{1}{3}\ln(|u|)$:

$\mathrm{B}_p(x)=\frac{1}{3}\ln(|3x-5|)$

or, sur $\left]-\infty;\frac{5}{3}\right[$, $3x-5<0$ (à démontrer)

donc $\mathrm{B}_p(x)=\frac{1}{3}\ln(-3x+5)$

- $\mathrm{C}(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{C}(x)=\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

donc C est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$

donc $\mathrm{C}_p=\frac{1}{2}\ln(|u|)$: $\mathrm{C}_p(x)=\frac{1}{2}\ln(|x^2+2x+2|)$

or, $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ donc $x^2+2x+1>0$:

$\mathrm{C}_p(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)$

- $\mathrm{D}(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{D}(x)=\frac{1}{2}\times 2x\mathrm{e}^{x^2}$

donc D est de la forme $\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^{u}$

donc $\mathrm{D}_p=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u}$: $\mathrm{D}_p(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$

- $\mathrm{E}(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$ sur $\mathbb{R}$

E est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc $\mathrm{E}_p=\ln(|u|)$:

$\mathrm{E}_p(x)=\ln(|\mathrm{e}^{x}+1|)=\ln(\mathrm{e}^{x}+1)$ (car $\mathrm{e}^{x}+1>0$)

- $\mathrm{F}(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}$

donc F est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$

donc $\mathrm{F}_p=\frac{1}{2}\ln(|u|)$:

$\mathrm{F}_p(x)=\frac{1}{2}\times\ln(|x^2-1|)$

or $x^2-1<0$ sur $]-1;1[$ (à démontrer)

donc $\mathrm{F}_p(x)=\frac{1}{2}\times\ln(1-x^2)$

- $\mathrm{G}(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$

$\mathrm{G}(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$

donc G est de la forme $\frac{u'}{u}$

donc $\mathrm{G}_p=\ln(|u|)$: $\mathrm{G}_p(x)=\ln(|\ln(x)|)$
or, $\ln(x)>0$ sur $]1;+\infty[$ (à démontrer)
donc $\mathrm{G}_p(x)=\ln(\ln(x))$

- $\mathrm{H}(x)=\mathrm{e}^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{H}(x)=\frac{1}{-2}\times(-2)\mathrm{e}^{-2x+3}$

donc H est de la forme $\frac{1}{-2}u'\mathrm{e}^{u}$

donc $\mathrm{H}_p=\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{u}$: $\mathrm{H}_p(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}$

- $\mathrm{I}(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$

$\mathrm{I}_p(x)=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ln(|x|)$

or $|x|=-x$ sur $]-\infty;0[$ donc

$\mathrm{I}_p(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}+\ln(-x)$

- $\mathrm{J}(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{J}(x)=\frac{1}{-2}\times(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}$

donc J est de la forme $\frac{1}{-2}u'\mathrm{e}^u$

donc $\mathrm{J}_p=\frac{1}{-2}\mathrm{e}^u$: $\mathrm{J}_p(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$

- $\mathrm{K}(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

$\mathrm{K}_p(x)=x^2-\frac{1}{x}$

- $\mathrm{L}(x)=\frac{1}{4x}$ sur $]-\infty;0[$

$\mathrm{L}(x)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{4x}$

donc L est de la forme $\frac{1}{4}\frac{u'}{u}$

donc $\mathrm{L}_p=\frac{1}{4}\ln(|u|)$: $\mathrm{L}_p(x)=\frac{1}{4}\ln(|4x|)$

or $4x<0$ sur $]-\infty;0[$

donc $\mathrm{L}_p(x)=\frac{1}{4}\ln(-4x)$

Remarque : on aurait aussi pu écrire que $\mathrm{L}(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{x}$ donc $\mathrm{L}_p=\frac{1}{4}\ln(|x|)$ puis $\mathrm{L}_p(x)=\frac{1}{4}\ln(-x)$.

De plus, $\frac{1}{4}\ln(-4x)=\frac{1}{4}(\ln(4)+\ln(-x))=\frac{1}{4}\ln(-x)+\frac{\ln 4}{4}$

donc les deux primitives diffèrent bien d'une constante.

Exercice 3

$f(x)=\frac{2x^2-3x-4}{x-2}$

On cherche à écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+\frac{c}{x-2}$.

En simplifiant, on aurait donc $f(x)=\frac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$ et donc, par identification (à faire) :

$a=2$, $b=1$, $c=-2$.

D'où : $f(x)=2x+1-\frac{2}{x-2}$.

Une primitive de f est alors : $\mathrm{F}(x)=x^2+x-2\ln(|x-2|)$

Or $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ donc sur $[4;+\infty[$: $\mathrm{F}(x)=x^2+x-2\ln(x-2)$.