# PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



## I. Primitive d'une fonction

**DÉFINITION**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de $f$ sur I toute solution de l'équation $y' = f$.

**THÉORÈME** (ADMIS MAIS DÉMONTRÉ PLUS TARD)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

**PROPRIÉTÉ**

Si $\mathrm{F}$ et $\mathrm{G}$ sont deux primitives de $f$, alors il existe un réel $k$ tel que, pour tout $x$ de $\mathrm{I}$ :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + k\,.$$

***Démonstration*** :

EXEMPLE C1

Déterminer la primitive de la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 5x^2 + 3x - 4$ qui s'annule en 2.

# Primitives usuelles

| Fonction $f$ : $f(x)= \dots$ | Une primitive F . $\mathrm{F}(x)= \dots$ | Intervalle |
|---|---|---|
| $k$ (où $k \in \mathbb{R}$) | $k\,x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ (où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$) | | Si $n \geqslant 0$ : $\mathbb{R}$<br>Si $n \leqslant -2$ : $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | | $]0;+\infty[$ |
| $\mathrm{e}^x$ | | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I .

| Fonction $f$ | Une primitive F | Conditions |
|---|---|---|
| *cas particulier* $\dfrac{u'}{u^2}$ | | $u$ ne s'annule pas sur I |
| $u'u^n$<br>(où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$) | | Si $n<0$ :<br>$u$ ne s'annule pas sur I |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | | $u$ est strictement positive sur I |
| $u'\mathrm{e}^u$ | | |
| $\dfrac{u'}{u}$ $n=-1$ | | $u$ ne s'annule pas sur I |

Rappelons également que l'on a vu la formule de dérivation d'une fonction composée :
$(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$ .

## Exemples C2 à C4

**1.** Déterminer une primitive de $\dfrac{3}{(3x+2)^2}$ .

**2.** Déterminer une primitive de $2x\,\mathrm{e}^{x^2+4}$ .

**3.** Déterminer une de $(4x+2)(x^2+x+1)$ .

Remarque : on dit ***il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut pas trouver une formule explicite*** (qui utilise les fonctions usuelles précédemment rencontrées et les règles opératoires classiques : addition, multiplication, composition, etc.) ***pour les primitives***. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ . En mathématiques (mais pas souvent en Terminale S), ces cas sont fréquents : on fait alors seulement des calculs approchés (nous y reviendrons plus tard) mais heureusement les moyens informatiques permettent maintenant des calculs rapides et une très bonne précision.

## II. Équations différentielles

**DÉFINITION**

Une ***équation différentielle*** est une équation qui lie une fonction inconnue $y$ et certaines de ses dérivées successives.

**EXEMPLE C5**

- $y'=-4y+7$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
  → linéaire car l'inconnue $y$ et sa dérivée $y'$ ne sont pas élevées à une puissance comme un carré ou un cube, et aucune fonction n'est « devant » ces termes
  → d'ordre 1 car la seule dérivée qui apparaît est la dérivée première $y'$
  → à coefficients constants car $-4$ et 7 sont des constantes, et non pas des fonctions.
- $y'=3x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

En réalité, c'est un abus de notation, on devrait écrire $y'=g$ où $g(x)=3x$ .
- $3y''-4y=5$ est une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.

### II.1 y' = a y

**PROPRIÉTÉ**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}, k \in \mathbb{R}.$$

***Démonstration*** :

**EXEMPLE C6**

Résoudre l'équation différentielle $3y'+4y=0$ .

## II.2 $y' = a\,y + b$

**PROPRIÉTÉS**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{a\,x} - \frac{b}{a}\,,\ k \in \mathbb{R}.$$

***Démonstration*** :

EXEMPLE C7

Résoudre l'équation différentielle $3\,y' + 4\,y = 5$ .

## II.3 $y' = a\,y + f$

**PROPRIÉTÉS**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

Les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = a\,y + f$ sont les fonctions définies sur I :

$$x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{a\,x} + y_0(x)\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

où $y_0$ est une solution particulière de (E).

$y' = a\,y$ est appelée *équation homogène associée*

***Démonstration*** :

**EXEMPLE A1**


p. 343 SF3

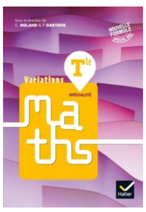
On considère l'équation différentielle (E) : $2\,y' + 3\,y = 6\,x^2 - 7\,x + 2$ .

**a.** Déterminer une fonction polynôme $y_0$ de degré 2 solution de (E).

**b.** Résoudre l'équation homogène associée à (E).

**c.** En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

## BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.346
- QCM 11 questions corrigées → p.347
- Exercices corrigés → 34 à 43 p.348
- Exercices types Bac guidés & corrigés → 128 et 129 p.360

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : tsm-ped-ym