TS-DM

LES BOITES DE CONSERVE - CORRECTION

Partie A : Minimiser la quantité d'acier pour maximiser le bénéfice

1. L'aire des disques (fond et couvercle) est : $2\pi R^2$.
L'aide de la surface latérale (rectangle) est : $2\pi R h$.
Donc : $\mathrm{A}(R)=2\pi R^2+2\pi R h$.
Or, le volume de la boite est 850 mL, soit 850 cm³, donc : $\pi R^2 h=850$.
D'où $h=\dfrac{850}{\pi \mathrm{R}^2}$ et $\mathrm{A}(R)=2\pi R^2+2\pi R\dfrac{850}{\pi R^2}$ *ie* $\mathrm{A}(R)=2\pi R^2+\dfrac{1700}{R}$.

2. Pour tout réel $R>0$: $\mathrm{A}'(R)=2\times 2\pi R-\dfrac{1700}{R^2}$ *ie* $\mathrm{A}'(R)=\dfrac{4\pi R^3-1700}{R^2}$.

On a donc : $\mathrm{A}'(R)>0 \Leftrightarrow 4\pi R^3-1700>0$

$$\Leftrightarrow R^3>\frac{1700}{4\pi}$$

$$\Leftrightarrow R>\sqrt[3]{\frac{1700}{4\pi}}.$$

Et donc :

R	0		$\sqrt[3]{\dfrac{1700}{4\pi}}$		$+\infty$
$\mathrm{A}'(R)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
A	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Finalement, la fonction A admet un minimum en $R=\sqrt[3]{\dfrac{1700}{4\pi}}\approx 5{,}1335$.

Autrement dit, la quantité d'acier est minimale pour un diamètre environ égal à 10,27 cm.

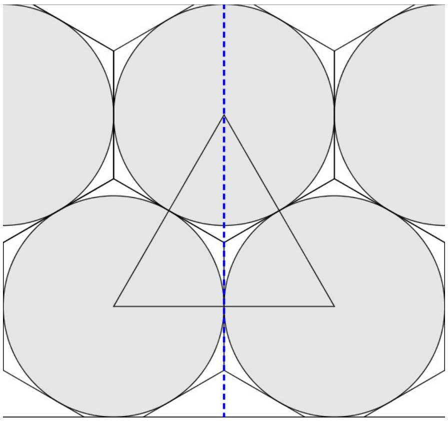
La hauteur est alors : $h\approx\dfrac{850}{\pi\times 5{,}1335^2}$ *ie* $h\approx 10{,}27$ cm.

Partie B : Théorie VS pratique… il faut réduire les chutes inévitables

1. L'aire d'un carré de côté 2R est $(2R)^2=4R^2$.
L'aire du disque que l'on découpe dans le carré est : πR^2.
Donc la fréquence de perte est : $\dfrac{4R^2-\pi R^2}{4R^2}=1-\dfrac{\pi}{4}\approx 0{,}2146$, soit environ 21,5 %.

2. La fréquence de perte est : $\dfrac{2\sqrt{3}R^2-\pi R^2}{2\sqrt{3}R^2}=1-\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\approx 0{,}0931$, soit environ 9,3 %.

3. a)



La largeur de la plaque est égale à la somme de deux rayons R et de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $2R$.

Donc $l=2R+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2R$ *ie* $l=(2+\sqrt{3})R$.

b) La plaque a une aire égale à l'aire d'un rectangle de dimensions $16R$ et l, autrement dit une aire égale à : $16R^2(2+\sqrt{3})$.

La fréquence de perte est alors : $\frac{16R^2(2+\sqrt{3})-16\pi R^2}{16R^2(2+\sqrt{3})}=1-\frac{\pi}{2+\sqrt{3}}\approx 0{,}1582$, soit environ 15,8 %.

c) Dans une plaque, il y a 16 disques, donc l'aire des surfaces métalliques utiles au fond et au couvercle de la boite de conserve (donc 2 disques) est : $\frac{16R^2(2+\sqrt{3})}{8}$ *ie* $2R^2(2+\sqrt{3})$.

Finalement, l'aire de la surface métallique totale nécessaire est :

$$\mathrm{A}(R)=2R^2(2+\sqrt{3})+\frac{1700}{R}.$$

Pour tout réel $R>0$: $\mathrm{A}'(R)=2\times 2R(2+\sqrt{3})-\frac{1700}{R^2}$ *ie* $\mathrm{A}'(R)=\frac{(8+4\sqrt{3})R^3-1700}{R^2}$.

On a donc : $\mathrm{A}'(R)>0 \Leftrightarrow (8+4\sqrt{3})R^3-1700>0$

$$\Leftrightarrow R^3>\frac{1700}{4\pi}$$

$$\Leftrightarrow R>\sqrt[3]{\frac{1700}{8+4\sqrt{3}}}.$$

Et donc :

R	0		$\sqrt[3]{\frac{1700}{8+4\sqrt{3}}}$		$+\infty$
$\mathrm{A}'(R)$	||	$-$	0	$+$	
A	||	$\searrow$		$\nearrow$	

Finalement, la fonction A admet un minimum en $R=\sqrt[3]{\frac{1700}{8+4\sqrt{3}}}\approx 4{,}8471$.

Autrement dit, la quantité d'acier est minimale pour un diamètre environ égal à 9,7 cm.

La hauteur est alors : $h\approx\frac{850}{\pi\times 4{,}8471^2}$ *ie* $h\approx 11{,}5$ cm.

Ceci est totalement conforme à la réalité : on mesure bien 9,7 cm pour le diamètre du fond et du couvercle, ainsi que 11,5 cm (hors « soudure ») pour la hauteur.