NOMBRES COMPLEXES : PARTIE 2

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\approx 0{,}207\,879\,576\,350\,761\,908\,546\,955\,619\,834$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

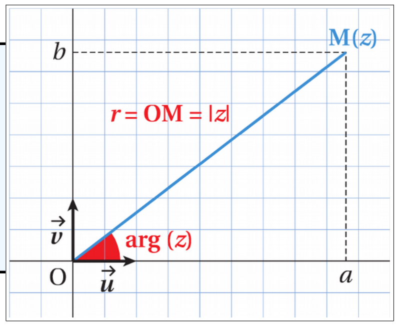
$$e \approx 2{,}71828183$$

$$i^2 = -1$$

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

Dans ce qui suit, le plan est muni d'un **<u>repère orthonormé direct</u>** $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On peut donc mesurer les angles orientés de vecteurs.

I. Forme trigonométrique d'un nombre complexe



DÉFINITION. **Argument d'un nombre complexe**

Soit z un nombre complexe non nul, et M son image.

On appelle ***argument de z***, et on note $\arg(z)$, une mesure

(exprimée en radians) de l'angle orienté ....

Remarques :

- on a donc $\arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})+2k\pi$.
Le complexe z a une infinité d'arguments !
On devrait donc noter par exemple $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).
Par abus de notation, et car il n'y a aucune confusion possible, on note plutôt $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$.

- le nombre 0 n'a pas d'argument.

Graphiquement, on obtient facilement :

PROPRIÉTÉS.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(\bar{z})=$ .... (modulo 2π)
- $\arg(-z)=$ .... (modulo 2π)

THÉORÈME-DÉFINITION. **Forme trigonométrique d'un complexe**

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Alors :

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Cette écriture s'appelle ***la forme trigonométrique de z***.

<u>Démonstration</u> :

Écrire un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique correspond géométriquement à repérer un point par des coordonnées (dites) polaires, le plan étant muni d'un repère orthonormé direct.

PROPRIÉTÉ.

Soit z un nombre complexe non nul.

Si $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ (où $r>0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$), alors : $|z|=r$ et $\arg(z)=\alpha$ (modulo 2π).

Démonstration :

$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ donc $|z|=|r||\cos\alpha+i\sin\alpha|=r\times 1=r$.

On a donc $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. Notons θ un argument de z. Alors : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.

D'où : $\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ et donc $\cos\alpha=\cos\theta$ et $\sin\alpha=\sin\theta$.

On en déduit donc : $\alpha=\theta+2k\pi$ (faire un dessin – cercle trigo. – ou utiliser équations de 1°S).

Ce qui signifie : $\arg(z)=\theta$ (modulo 2π).

On peut ainsi reconnaître directement la forme trigonométrique de certains nombres complexes.

Exemples :

- $5\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ est la forme trigonométrique du nombre complexe de module ..... et d'argument ......
- Soit $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)$. Ce n'est pas la forme trigonométrique car $-3<0$ mais :

$z=-3\left(\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)=3\left(-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}\right)=$ ....

....

....

Le complexe z a donc pour module .... et pour argument ....

De la propriété précédente, on déduit immédiatement :

PROPRIÉTÉS. Deux nombres complexes non nuls sont égaux

si, et seulement si,

ils ont même module et même argument (à 2π près).

La forme trigonométrique nous permet de démontrer certaines propriétés sur l'argument, bien utiles pour calculer la forme trigonométrique d'un produit, d'une puissance ou d'un quotient de nombres complexes.

PROPRIÉTÉS.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- **Produit :** $\arg(zz')=$ .... (modulo 2π)
- **Puissance :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n)=$ .... (modulo 2π)
- **Quotient :** $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=$ .... (modulo 2π)

Démonstration :

• On note $\alpha_1=\arg(z)$ et $\alpha_2=\arg(z')$.

On a donc : $z=|z|(\cos\alpha_1+\mathrm{i}\sin\alpha_1)$ et $z'=|z'|(\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_2)$.

Alors : $zz' =$

Or, $|z||z'|\geqslant 0$, donc cette écriture est bien la forme trigonométrique de zz', d'où :
$|zz'|=|z||z'|$ (mais on le savait déjà) et $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$.

• Par récurrence sur n en utilisant la propriété du produit ci-dessus.

• On pose $\mathrm{Z}=\dfrac{z}{z'}$. Alors $z=\mathrm{Z}z'$ et $\arg(z)=\arg(\mathrm{Z})+\arg(z')$.

D'où : $\arg(\mathrm{Z})=\arg(z)-\arg(z')$ c'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, et inversement ?

• ***De la forme algébrique à la forme trigonométrique*** : on a $z=a+\mathrm{i}b$.

On calcule le module $|z|$. On écrit alors $z=|z|\left(\dfrac{a}{|z|}+\mathrm{i}\dfrac{b}{|z|}\right)$.

On cherche alors θ tel que $\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta=\dfrac{b}{|z|}$. Ce sera l'argument de z.

• ***De la forme trigonométrique à la forme algébrique*** : on a $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ où $\theta=\arg(z)$.
Il suffit de développer et on retrouve la forme algébrique : $z=|z|\cos\theta+\mathrm{i}|z|\sin\theta$.

Exemples : mettre sous forme trigonométrique les complexes $z_1=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=2-2\mathrm{i}$.

II. Notation exponentielle

PROPRIÉTÉ.

Soit f la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$t \mapsto \cos t + \mathrm{i}\sin t$.

Alors : $f(t+t') = f(t)f(t')$.

Autrement dit, la fonction f vérifie l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle.

Démonstration :

D'où l'intérêt d'introduire une nouvelle notation, en lien avec la forme trigonométrique.

NOTATION. **Forme exponentielle d'un complexe**

Pour tout réel θ, on note : $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta =$ ....

On a alors : tout nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit ....

Remarque : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} =$ ....

C'est ce qu'on appelle l'identité d'Euler. C'est en effet Leonhard Euler (1707-1783) qui a démontré cette relation. En 1988, les lecteurs de *The Mathematical Intelligencer*, célèbre magazine consacré aux mathématiques, l'ont désignée comme « la plus belle formule mathématique de tous les temps ».
Elle décore le plafond du Palais de la découverte, à Paris.
Elle relit gracieusement et efficacement les grandes branches de la géométrie :

- l'analyse avec le nombre e ou la fonction exponentielle ;
- l'algèbre avec le nombre i, dont l'invention audacieuse ouvrira tout un monde mathématique ;
- le calcul avec le nombre -1, un entier négatif ;
- la géométrie avec le nombre π, longueur d'un cercle de rayon 1 dont on trouve une valeur approchée $\frac{256}{81}$ dans un papyrus égyptien daté d'environ -1800 avant J.-C.

Plus jolie encore, en écrivant $e^{i\pi}+1=0$, on fait apparaître les 5 grandes constantes des mathématiques.

$e \approx 2,71828183$

$i^2=-1$

$\pi \approx 3,14159265$

$$e^{i\pi}+1=0$$

PROPRIÉTÉS.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls : $z=r\,e^{i\theta}$ et $z'=r'\,e^{i\theta'}$.

- **Produit :** $zz'=rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$
- **Puissance :** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z^n=r^n e^{in\theta}$
- **Quotient :** $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

<u>Démonstration</u> :

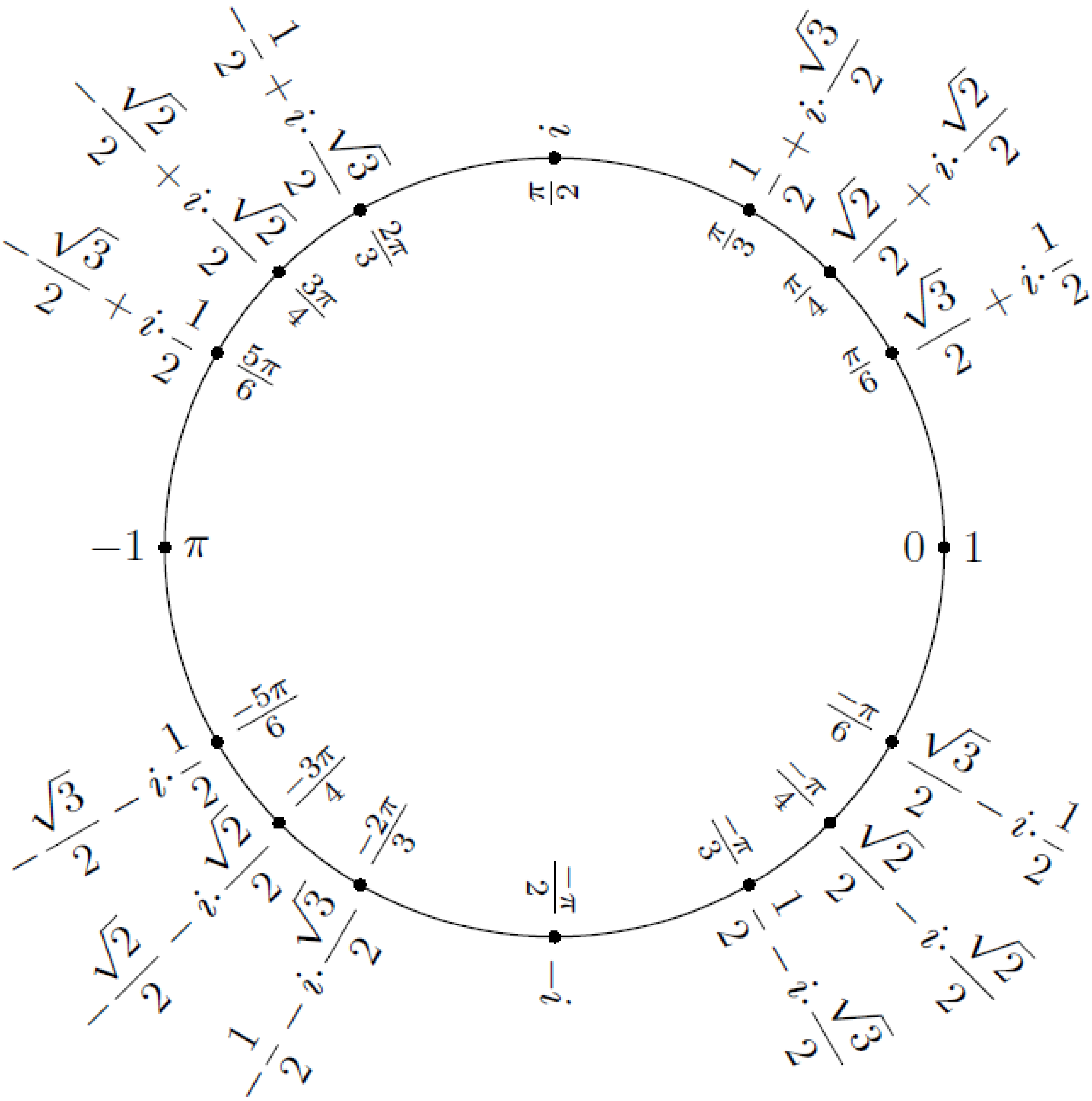
- $|zz'|=|z||z'|=rr'$ et $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')=\theta+\theta'$ donc $zz'=rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$.
- Par récurrence sur *n*.

  Si $n=0$: $z^n=z^0=1$ et $r^n e^{in\theta}=e^0=\cos 0+i\sin 0=1$.

  Si $z^n=r^n e^{in\theta}$ alors $z^{n+1}=z\,z^n=r\,e^{i\theta}r^n e^{in\theta}=r^{n+1}e^{i\theta}e^{in\theta}$.

  Or, d'après la propriété précédente sur le produit, on a $e^{i\theta}e^{in\theta}=e^{i(\theta+n\theta)}=e^{i(n+1)\theta}$.

  D'où $z^{n+1}=r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}=\dfrac{r}{r'}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')=\theta-\theta'$, d'où le résultat.



Source : chingatome.net

III. Applications en géométrie

PROPRIÉTÉS. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.
Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

- $(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\arg(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})$
- $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)$
- $\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\theta$ (modulo 2π) et $\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=r$

Démonstrations :

- facile : voir page 292
- facile : relation de Chasles + propriété ci-dessus + quotient de deux arguments. Voir page 292.
- facile : propriété ci-dessus + $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\left|\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}}\right|$. Voir page 292.

Exemples d'utilisation en géométrie

On considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. On note a, b, c et d les affixes respectives de ces points.
Les théorèmes précédents permettent en particulier d'étudier des configurations géométriques.

- **Alignement de trois points**

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=0\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$.

- **Parallélisme de deux droites**

(AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})=0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)=0\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a}\in\mathbb{R}$.

- **Orthogonalité de deux droites**

(AB) et (CD) sont orthogonales $\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

- **Caractérisation de triangles**

- Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

- Le triangle ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{AB}=\mathrm{AC} \\ (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{\pi}{3} \text{ ou } (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})=-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \dfrac{c-a}{b-a}=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

<u>**Un exercice corrigé**</u> (voir manuel page 297)

ÉNONCÉ Soit A, B, C, D, E et F six points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 1 + 5\text{i} \;;\; b = 7 - 2\text{i} \;;\; c = 4 + \frac{3}{2}\text{i} \;;\; d = 5 + 6\text{i} \;;\; e = \frac{15}{2} + \frac{9}{2}\text{i} \;;\; f = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\text{i}.$$

a. Calculer les modules de $c - a$ et $c - d$.
En déduire une interprétation géométrique.

b. Calculer les modules de $a - e$, $e - b$, $b - f$ et $f - a$.
En déduire une interprétation géométrique.

c. Calculer $Z = \dfrac{e - a}{f - a}$ et un argument de Z. En déduire la nature du quadrilatère AEBF.

SOLUTION

a. $|c - a| = \left|4 + \frac{3}{2}\text{i} - (1 + 5\text{i})\right| = \left|4 + \frac{3}{2}\text{i} - 1 - 5\text{i}\right|$

$= \left|3 - \frac{7}{2}\text{i}\right| = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$|c - d| = \left|4 + \frac{3}{2}\text{i} - 5 - 6\text{i}\right| = \left|-1 - \frac{9}{2}\text{i}\right|$

$= \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

On a donc $|c - a| = |c - d|$.
Donc AC = DC et D appartient au cercle de centre C passant par A ou bien le triangle ACD est isocèle en C ou encore la médiatrice de [AD] passe par C.

b. $|a - e| = \left|1 + 5\text{i} - \frac{15}{2} - \frac{9}{2}\text{i}\right| = \left|-\frac{13}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right|$

$= \sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{2}$

$|e - b| = \left|\frac{15}{2} + \frac{9}{2}\text{i} - 7 + 2\text{i}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{13}{2}\text{i}\right| = \frac{\sqrt{170}}{2}$

$|b - f| = \left|7 - 2\text{i} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\text{i}\right| = \left|\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\text{i}\right| = \frac{\sqrt{170}}{2}$

$|f - a| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\text{i} - 1 - 5\text{i}\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{13}{2}\text{i}\right| = \frac{\sqrt{170}}{2}$

On constate que les quatre modules sont les mêmes. Donc EA = BE = FB = AF.
On en déduit que AEBF est un losange.

c. D'après les calculs faits au **b** : $Z = \dfrac{e - a}{f - a} = \dfrac{\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\text{i}}{-\frac{1}{2} - \frac{13}{2}\text{i}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\text{i}}{-\frac{1}{2} - \frac{13}{2}\text{i}} = \frac{\left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\text{i}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{13}{2}\text{i}\right)}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{13}{2}\text{i}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{13}{2}\text{i}\right)} = \frac{-\frac{13}{4} + \frac{169}{4}\text{i} + \frac{1}{4}\text{i} + \frac{13}{4}}{\frac{170}{4}} = \text{i}$$

Donc $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}$.

AEBF est un losange avec un angle droit, c'est donc un carré.

MÉTHODE

• Dans les situations géométriques, il faut presque systématiquement utiliser le théorème :

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = re^{i\theta} \text{ si et seulement si}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta \text{ (modulo } 2\pi) \text{ et } \frac{CD}{AB} = r.$$

• Il faut aussi connaître les théorèmes de géométrie.

Par exemple, pour montrer qu'un triangle est rectangle, on peut avoir à utiliser :
- la réciproque du théorème de Pythagore ;
- les propriétés sur les parallélogrammes ;
- la propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle.

Si on montre que AB = AC, on peut en conclure, par exemple, que :
- ABC est un triangle isocèle en A ;
- A appartient à la médiatrice de [BC] ;
- C appartient au cercle de centre A et de rayon [AB].

IV. L'imaginaire à la puissance imaginaire...

Une identité magnifique :

$$\boxed{i^{i} = e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

soit : $i^{i} \approx 0{,}207\,879\,576\,350\,761\,908\,546\,955\,619\,834$

Démonstration : $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$

donc $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{i} = i^{i}$

c'est-à-dire $e^{i^2\frac{\pi}{2}} = i^{i}$

c'est-à-dire $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^{i}$.