INTERROGATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 40 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

1. On pose : $u(x)=5{,}4$ $\quad v(x)=1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x}$.

Alors : $u'(x)=0$ $\quad v'(x)=90\times(-0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x})=-36\mathrm{e}^{-0{,}4x}$.

$f=\dfrac{u}{v}$ donc $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$: $f'(x)=\dfrac{0-5{,}4\times(-36\mathrm{e}^{-0{,}4x})}{v(x)^2}$ d'où $f'(x)=\dfrac{194{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x}}{v(x)^2}$.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0{,}4x}>0$ et $v(x)>0$ donc $f'(x)>0$.

D'où :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$\approx 0{,}059$ $\nearrow$ $5{,}4$

$f(0)=\dfrac{5{,}4}{1+90\exp(0)}=\dfrac{5{,}4}{91}=\dfrac{27}{455}\approx 0{,}059$

2.

a) Pour tout réel x de $[0;+\infty[$: $g'(x)=0+90\times(-0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x})=-36\mathrm{e}^{-0{,}4x}$.

D'où : $g'(x)<0$ et donc g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

b)
- g est dérivable sur $[0;+\infty[$, donc g est continue sur $[0;+\infty[$
- g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$
- $g(0)=-1+90\mathrm{e}^0=89$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-1$, avec $0\in\ ]-1;89]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

c) Dans la calculatrice CASIO, on utilise le menu TABLE. Avec la méthode par balayage, on obtient :

$11<\alpha<12$ puis $11{,}2<\alpha<11{,}3$ puis $11{,}24<\alpha<11{,}25$ puis $11{,}249<\alpha<11{,}250$.

D'où : $\alpha\approx 11{,}250$ (à 0,001 près).

d) $f''(x)=\dfrac{77{,}76\mathrm{e}^{-0{,}4x}g(x)}{(1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x})^3}$. Or : $1+90\mathrm{e}^{-0{,}4x}>0$ et $77{,}76\mathrm{e}^{-0{,}4x}>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	$\approx 0{,}023$	$\nearrow$	$0{,}54$	$\searrow$	0

Donc : f est convexe sur $[0;\alpha]$ et concave sur $[\alpha;+\infty[$.

e) D'après la question précédente, la vitesse de croissance du potiron (assimilée à f') est maximale en $x=\alpha$. De plus, $g(\alpha)=0$ donc $90\mathrm{e}^{-0,4\alpha}=1$. D'où : $f(\alpha)=\dfrac{5,4}{1+90\mathrm{e}^{-0,4\alpha}}=\dfrac{5,4}{1+1}=\dfrac{5,4}{2}=2,7$.

Or, *f* est strictement croissante avec $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5,4$

donc on peut dire que la vitesse de croissance du potiron est maximale à mi-croissance.