

PROGRESSION TERMINALE OPTION MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES
2021-2022

Nb semaines	Semaine n°	Thème	Contenu non détaillé
3	1, 2, 3	Modèles définis par une fonction	Dérivation et applications. Continuité d'une fonction. Convexité.
4	4, 5, 6, 7	Évolution : modèles discrets	Limite d'une suite. Suites arithmético-géométriques.
4	8, 9, 10, 11	Évolution : modèles continus	Limite d'une fonction. Équations différentielles (dont $y' = a y + b$) et primitives.
4	12, 13, 14, 15	Approche historique de la fonction logarithme	Fonction ln et propriétés.
3	16, 17, 18	Calculs d'aires	Intégrale d'une fonction continue.
2	19, 20	Répartition des richesses, inégalités	Statistique descriptive : caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile).
2	21, 22	Inférence bayésienne	Probabilités conditionnelles : inversion du conditionnement, formule de Bayes.
3	23, 24, 25	Expériences répétées, échantillonnage	Loi uniforme discrète. Loi de Bernoulli. Loi binomiale. Échantillonnage et estimation.
3	26, 27, 28	Temps d'attente	Loi géométrique. Lois continues à densité, dont la loi uniforme continue et la loi exponentielle.
2	29, 30	Corrélation et causalité	Statistique à deux variables.
Remarques :			
	≈ 23	<i>Épreuve du Bac de spécialité mathématiques</i>	
	33	<i>Fin des cours ?</i>	
	34, 35	<i>Grand Oral ?</i>	

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

ANALYSE

Le programme d'analyse est construit autour des notions suivantes : suites, fonctions usuelles, limite et continuité, dérivation, intégration. Le développement de ces notions a été complexe et il peut être l'occasion d'études historiques ou épistémologiques intéressantes.

Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux. Le thème dont les origines sont les plus anciennes est le calcul intégral. On peut en trouver des prémisses chez Archimède (longueur du cercle, quadrature de la parabole, etc.), Liu Hui ou encore Cavalieri.

L'étude des procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé le logarithme illustre les liens entre discret et continu et fournit une source féconde d'activités. Le lien avec des problèmes de quadrature ou celui des tangentes est également possible.

Le calcul différentiel est une création du XVII^e siècle où il s'est développé de concert avec la physique mathématique. En dépit de la fragilité des fondations, l'efficacité du calcul infinitésimal et la variété de ses applications en ont imposé l'usage. Au-delà de la célèbre querelle, l'évocation des noms de Newton et Leibniz permet de faire voir deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal.

Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore le lien entre le discret et le continu.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

La parution de l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli (1713) marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne. Le résultat majeur de cet ouvrage est la loi des grands nombres de Bernoulli, qui relie fréquences et probabilité, et valide le principe de l'échantillonnage. Il constitue le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités. Bayes puis Laplace théorisent un peu plus tard les problèmes de probabilités inverses.

Au XVIII^e siècle, sous l'influence d'hommes politiques et d'économistes, les publications de données sur la démographie, les maladies, les impôts, etc., se multiplient considérablement, consacrant la naissance de la statistique en tant qu'instrument mathématique d'observation sociale. Avec Bayes, on assiste aux débuts de la statistique inférentielle.

Au début du XIX^e siècle, la modélisation des erreurs de mesure va devenir centrale pour faire de la statistique une science à part entière. Lagrange et Laplace développent une approche probabiliste de la théorie des erreurs. Gauss (1809, 1821), après Legendre (1805), imagine une méthode des moindres carrés qu'il applique avec succès à la prédiction de la position d'un astéroïde. Il y propose de comprendre l'écart-type comme une « erreur moyenne à craindre ».

L'introduction de méthodes statistiques en sociologie est l'œuvre du mathématicien et astronome belge Quételet dans les années 1830. Il réfléchit à la distribution de données autour de la moyenne, ce qui sera approfondi notamment par l'Anglais Galton. De son côté, Pearson s'intéresse à la corrélation entre variables quantitatives, à la base de la régression linéaire. Au XX^e siècle, Student et Fisher développent la biométrie et précisent la différence entre le domaine des probabilités et celui d'une statistique devenue mathématique.

Aujourd'hui, les statistiques jouent un rôle essentiel dans les algorithmes de l'intelligence artificielle et de l'apprentissage machine.

Modèles définis par une fonction

Contenus

- Approche intuitive de la continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Cas des fonctions strictement monotones.
- Fonction dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, e^u , u^2 .
- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes, équivalence admise, lorsque f est dérivable, avec la position par rapport aux tangentes.
- Caractérisation admise par la croissance de f' , la positivité de f'' .
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer une fonction dérivée. Dresser un tableau de variation.
- Exploiter le tableau de variation pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x)=k$, pour résoudre une inéquation du type $f(x) \leq k$.
- Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x)=k$.
- Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion.
- Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle.

Démonstrations possibles

- Calcul de la fonction dérivée de $\exp u$.

Exemples d'algorithmes

- Méthodes de recherche de valeurs approchées d'une solution d'équation du type $f(x)=k$: balayage, dichotomie, méthode de Newton.

Évolution : modèles discrets

Contenus

- Approche intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes.
- Limite d'une suite géométrique de raison positive.
- Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.
- Suites arithmético-géométriques.

Capacités attendues

- Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence.
- Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.
- Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite.
- Pour une récurrence arithmético-géométrique : recherche d'une suite constante solution particulière ; utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions.

Démonstrations possibles

- Limite des sommes des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.

Exemples d'algorithmes

- Recherche de seuils.
- Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, calcul des termes successifs.
- Recherche de valeurs approchées de constantes mathématiques, par exemple π , $\ln(2)$, $\sqrt{2}$.
- Méthode d'Euler.

Problèmes possibles

- Évolution d'un capital, amortissement d'une dette.
- Loi de décroissance radioactive : modèle discret.
- Loi de refroidissement de Newton (modèle discret).
- Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret $N_{t+1} = N_t + r N_t (k - N_t)$.
- Modèle proie prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.

Évolution : modèles continus

Contenus

- Notion de limite. Lien avec la continuité et les asymptotes horizontales ou verticales.

Limites des fonctions de référence (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle, logarithme).

Les études de fonctions peuvent se faire sur des intervalles quelconques, avec une notion intuitive de limite aux bornes de l'intervalle. La formalisation de la notion de limite n'est pas un attendu du programme. Les opérations sur les limites sont admises. Au besoin, l'utilisation du théorème de composition des limites et des théorèmes de comparaison se fait en contexte.

- Sur des exemples, notion d'une solution d'équation différentielle.
- Notion de primitive, en liaison avec l'équation différentielle $y' = f$.

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle différent d'une constante. Exemples.

- Équation différentielle $y' = a y + b$, où a et b sont des réels ; allure des courbes.

Le programme se limite à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. Sur les exemples, on met en évidence l'existence et l'unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée. Des équations différentielles non linéaires peuvent apparaître, par exemple l'équation logistique dans le cadre des thèmes d'étude, mais aucune connaissance spécifique à ce sujet n'est exigible.

Capacités attendues

- Calculer des limites.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites.
- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2 u u'$, $e^u u'$ ou $\frac{u'}{u}$.
- Résoudre une équation différentielle $y' = a y$.

Pour une équation différentielle $y' = a y + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

Démonstrations possibles

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle différent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = a y$.

Exemples d'algorithmes

- Sur des exemples, résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler.

Problèmes possibles

- Loi de décroissance radioactive : modèle continu.
- Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle.
- Chute d'un corps dans un fluide visqueux.
- Dynamique des populations : modèle de Verhulst (logistique) continu : $y' = a y(b - y)$.

Approche historique de la fonction logarithme

Contenus

– Réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, représentation graphique.

La notion de fonction réciproque ne donne pas lieu à des développements théoriques, mais est illustrée par les fonctions carré, racine carrée, exponentielle, logarithme.

– Fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle. Limites, représentation graphique. Équation fonctionnelle. Fonction dérivée.

– Fonction dérivée de $\ln u$.

Capacités attendues

– Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.

– Utiliser la relation $\ln q^n = n \ln q$ pour déterminer un seuil.

Démonstrations possibles

– Relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

– Calcul de la fonction dérivée du logarithme, en admettant sa dérivabilité.

– Calcul de la fonction dérivée de $\ln u$.

Exemples d'algorithmes

– Algorithme de Briggs pour le calcul de logarithmes.

Problèmes possibles

– Le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l'astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine. Influence des tables trigonométriques.

– Lien entre suites arithmétiques et géométriques (depuis Archimède). Construction de tables d'intérêts.

– Les travaux de Neper. Le passage du discret au continu.

– Vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ plus tardive.

– Quadrature de l'hyperbole, problème des sous-tangentes constantes.

Calculs d'aires

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^x f(x) dx$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f .
- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f , alors $\int_a^x f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations possibles

- Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ lorsque f est une fonction continue positive croissante.

Exemples d'algorithmes

- Méthode des rectangles, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo pour un calcul d'aire.

Problèmes possibles

- Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède.
- Quadrature de l'hyperbole par une ou deux méthodes (Brouncker, Grégoire de Saint-Vincent).
- Approximation de $\ln 2$ par dichotomie selon l'algorithme de Brouncker.
- Approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle sur $[0,1]$ par la méthode des rectangles.
- Estimation de l'aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo.
- Approximation de π et aire d'un disque.

Ce thème peut s'étendre à des calculs de volumes notamment pour des solides de révolution (cylindre, cône, sphère, paraboloides de révolution...).

Répartition des richesses, inégalités

Contenus

- Statistique descriptive : caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile).

Capacités attendues

–

Démonstrations possibles

–

Exemples d'algorithmes

–

Problèmes possibles

- Courbe de Lorenz : sur des données réelles, présentation, définition, lecture, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, interprétation. Modélisation par la courbe représentative d'une fonction continue, croissante, convexe de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et ayant 0 et 1 comme points fixes. Position par rapport à la première bissectrice.
- Indice de Gini : définition, calcul, interprétation comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition. Comparaison de plusieurs répartitions. Évolution de l'indice sur une période.

Inférence bayésienne

Contenus

- Probabilités conditionnelles : inversion du conditionnement, formule de Bayes.

Capacités attendues

–

Démonstrations possibles

–

Exemples d'algorithmes

–

Problèmes possibles

- Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.
- Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».

Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice, etc. où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en œuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la formule de Bayes pour l'inversion des conditionnements.

La question d'intérêt est représentée par un événement A de probabilité $P(A)$, dite probabilité *a priori*. L'observation d'un événement B conduit à remplacer la probabilité *a priori* $P(A)$ par la probabilité conditionnelle $P_B(A)$, dite *a posteriori*. La formule de Bayes $P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$ permet d'exprimer la probabilité *a posteriori* lorsque l'expression du second membre est évaluable. Elle montre la distinction essentielle entre $P_B(A)$ et $P_A(B)$. Bien comprendre cette distinction est un objectif majeur.

Expériences répétées, échantillonnage

Contenus

- Loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Espérance.
- Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli : définition, espérance et écart type.
- Schéma de Bernoulli. Représentation par un arbre.
- Coefficients binomiaux : définition (nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n), triangle de Pascal, symétrie.
- Variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès dans le schéma de Bernoulli. Expression, espérance et écart type (admis). Représentation graphique.

Capacités attendues

- Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli ou une loi binomiale.
- Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.
- Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements de type $P(X=k)$ ou $P(X \leq k)$, etc.
- Si X suit une loi binomiale, déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser l'espérance des lois précédentes.
- Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles, des répétitions d'expériences aléatoires.

Démonstrations possibles

- Espérance et écart type d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
- Espérance d'une variable aléatoire uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Espérance d'une variable aléatoire suivant une binomiale ($n \leq 3$).

Exemples d'algorithmes

- Dans le cadre de la loi binomiale : calcul de coefficients binomiaux (triangle de Pascal), de probabilités ; détermination d'un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.
- Simulation avec Python d'une variable aléatoire (de la loi de Bernoulli, d'une loi uniforme discrète, etc.) d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire. Fonction Python renvoyant une moyenne pour un échantillon. Série des moyennes pour N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calcul de l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Calcul de la proportion des cas où l'écart entre la moyenne m et μ est inférieur ou égal à $k \frac{\sigma}{n}$ ou à $k s$, pour $k=2$ ou $k=3$.

Problèmes possibles

- Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité.
- Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $\frac{n}{2}$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
- Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0, k]$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- Sondages par échantillonnage aléatoire simple. Fourchette de sondage. Réflexion sur la réalisation effective d'un sondage et les biais possibles (représentativité, sincérité des réponses, etc.).
- Démarche des tests d'hypothèse et de l'estimation. Les observations étant vues comme un échantillon aléatoire d'expériences régies par une loi inconnue (à découvrir), il s'agit de confronter une modélisation théorique proposée avec les résultats mesurés. Une bonne adéquation peut permettre de valider a priori le modèle (avec un certain degré de confiance), tandis que l'observation d'événements donnés avec une probabilité très faible dans le modèle peut conduire à rejeter le modèle et à en chercher un autre.

Ce thème vise à illustrer le modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes et de l'échantillonnage ainsi que ses applications à l'inférence statistique, où il s'agit, à partir de l'observation d'un échantillon, d'induire des propriétés de la population dont il est issu.

Temps d'attente

Contenus

- Loi géométrique : définition, expression, espérance (admise), représentation graphique et propriété caractéristique (loi sans mémoire).
- Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leq x)$.
- Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales.
- Loi uniforme sur $[0,1]$ puis sur $[a,b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.
- Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire.

Capacités attendues

- Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi géométrique.
- Dans le cas où X suit une loi géométrique, calculer explicitement les probabilités des événements de type $P(X=k)$ ou $P(X \leq k)$, etc.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser l'espérance d'une loi géométrique.
- Utiliser en situation la caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.
- Déterminer si une fonction est une densité de probabilité. Calculer des probabilités.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

Démonstrations possibles

- Caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.

Exemples d'algorithmes

- Simulation d'une variable aléatoire de loi géométrique à partir du schéma de Bernoulli.
- Simulation d'une loi exponentielle à partir d'une loi uniforme.
- Demi-vie d'un échantillon de grande taille d'atomes radioactifs.
- Simulation d'une variable de Bernoulli ou d'un lancer de dé (ou d'une variable uniforme sur un ensemble fini) à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
- Simulation du comportement de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Problèmes possibles

- Durée de vie d'un atome radioactif. Discrétisation d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
- Exemples de modélisation par une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou exponentielle : durée entre deux appels téléphoniques, durée de vie d'un composant électronique, période de retour de crue, etc.
- Utilisation de la loi uniforme. Temps d'attente à un arrêt de bus, paradoxe de l'inspection.

Certains phénomènes physiques (temps de désintégration d'un atome radioactif) ou biologiques (durée de vie de certains organismes) possèdent la propriété d'absence de mémoire. Leur modélisation mathématique repose sur l'utilisation des lois géométriques et exponentielles selon que le temps est considéré comme discret ou continu. La loi géométrique est vue soit comme la distribution du premier succès dans un schéma de Bernoulli, soit comme une loi discrète possédant la propriété d'absence de mémoire. La loi exponentielle peut être introduite à partir de la propriété d'absence de mémoire.

Corrélation et causalité

Contenus

- Nuage de points. Point moyen.
- Ajustement affine. Droite des moindres carrés. Coefficient de corrélation.
- Ajustement se ramenant par changement de variable à un ajustement affine.
- Application des ajustements à des interpolations ou extrapolations.

Capacités attendues

- Représenter un nuage de points.
- Calculer les coordonnées d'un point moyen.
- Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.

Démonstrations possibles

- Droite des moindres carrés.

Exemples d'algorithmes

–

Problèmes possibles

- Établissement de la loi d'Ohm.
- Loi de désintégration radioactive.
- Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique.
- Loi de Moore.

L'objectif de ce thème est d'amener l'élève à évaluer une corrélation entre deux phénomènes, à développer une réflexion critique sur le lien entre deux phénomènes corrélés, et finalement à distinguer corrélation et causalité.