T[le] spé

LIMITES DE FONCTIONS

« Ou le monde subsiste par sa propre nature, par ses lois physiques, ou un Être suprême l'a formé suivant ses lois suprêmes : dans l'un et l'autre cas, ces lois sont immuables ; dans l'un et l'autre cas, tout est nécessaire ; les corps graves tendent vers le centre de la terre, sans pouvoir tendre à se reposer en l'air. Les poiriers ne peuvent jamais donner d'ananas. L'instinct d'un épagneul ne peut être l'instinct d'une autruche. Tout est arrangé, engendré, ***limité****. »*

François-Marie Arouet (dit Voltaire), Dictionnaire philosophique (1764)

Rappels de Première

cours → p.188

9 exercices corrigés → p.189

Rappels sur la fonction exp :

tsm-lf-rap-fb　　　tsm-lf-rap-sf

I. Définitions

I.1 Limite en un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a-r;r[$ ou $]a;a+r[$ ($r>0$).

DÉFINITIONS/NOTATIONS

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$:

Illustrations :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$　　　$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$　　　$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

(cc) BY-NC-SA

Définitions formelles plus rigoureuses (hors-programme) :

$\lim_{x\to a} f(x)=l \quad (l\in\mathbb{R})$	$\forall \epsilon>0, \exists \lambda>0, x\in D_f \cap]a-\lambda;a+\lambda[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall \epsilon>0, \exists \lambda>0, (x\in D_f \text{ et } \lvert x-a\rvert<\lambda) \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, x\in D_f \cap]a-\lambda;a+\lambda[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, (x\in D_f \text{ et } \lvert x-a\rvert<\lambda) \Rightarrow f(x)<A$
$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, x\in D_f \cap]a-\lambda;a+\lambda[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R}, \exists \lambda>0, (x\in D_f \text{ et } \lvert x-a\rvert<\lambda) \Rightarrow f(x)>A$

DÉFINITION

Lorsque $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est une ***asymptote verticale*** à la courbe représentative de *f*.

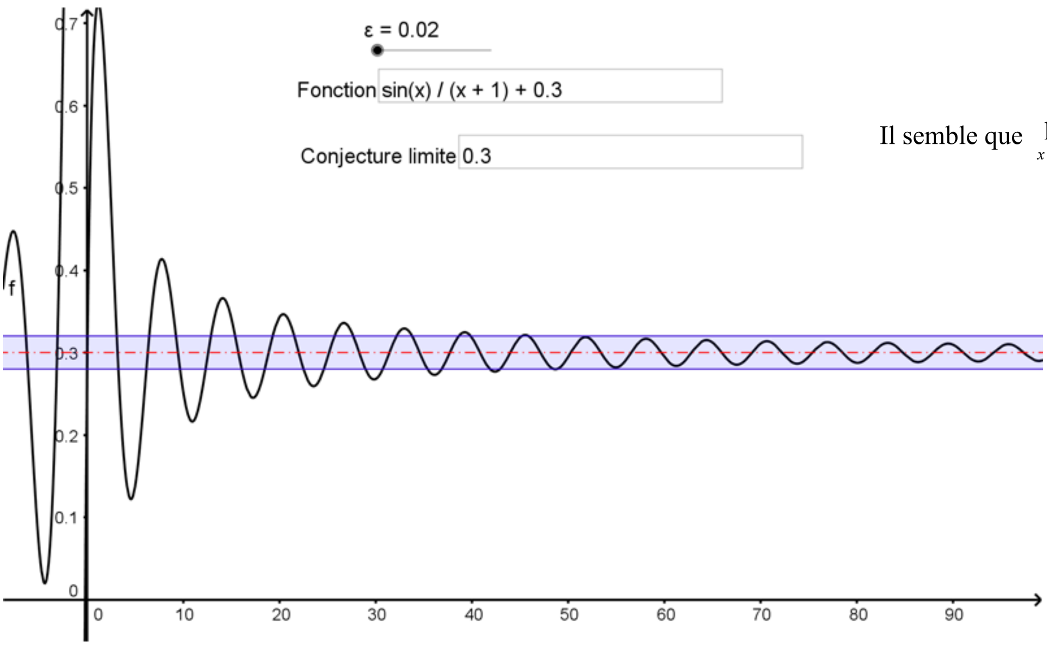
I.2 Limite en l'infini

→ Limites en +∞

On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.

DÉFINITIONS/NOTATIONS

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \quad (l\in\mathbb{R})$:
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$:
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:



Il semble que $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{x}{x+1}+0{,}3\right)=0{,}3$.

→ *Limites en* $-\infty$

On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]-\infty;a[$.

DÉFINITIONS/NOTATIONS

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ ($l\in\mathbb{R}$) :
  tout intervalle ouvert contenant l contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez petit.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:
  pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A]$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez petit.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$:
  pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez petit.

Définitions formelles plus rigoureuses (hors-programme) :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ($l\in\mathbb{R}$)	$\forall\epsilon>0,\exists\lambda>0, x\in D_f\cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall\epsilon>0,\exists\lambda>0,(x\in D_f \text{ et } x>\lambda)\Rightarrow\lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0, x\in D_f\cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0,(x\in D_f \text{ et } x>\lambda)\Rightarrow f(x)<A$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0, x\in D_f\cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0,(x\in D_f \text{ et } x>\lambda)\Rightarrow f(x)>A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ ($l\in\mathbb{R}$)	$\forall\epsilon>0,\exists\lambda<0, x\in D_f\cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall\epsilon>0,\exists\lambda<0,(x\in D_f \text{ et } x<\lambda)\Rightarrow\lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0, x\in D_f\cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0,(x\in D_f \text{ et } x<\lambda)\Rightarrow f(x)<A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0, x\in D_f\cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0,(x\in D_f \text{ et } x<\lambda)\Rightarrow f(x)>A$

DÉFINITION

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, on dit que la droite d'équation $y=l$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f en $+\infty$. (déf. analogue en $-\infty$)

EXEMPLES C1 ET C2 **1.** Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$. **2.** Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

II. Opérations sur les limites

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de α, où α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

II.1 Limite d'une somme

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

II.2 Limite d'un produit

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x)=$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**

II.3 Limite d'un quotient

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**

Exemples A1 à A3

p. 197 SF3

a. p est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $p(x)=(\sqrt{x}+3x)(x^2-4)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$.

b. q est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x)=\mathrm{e}^x(1-x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)$.

c. r est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x)=\dfrac{5}{\mathrm{e}^x+2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} r(x)$.

Exemples A4 et A5

p. 198 SF4

a. Déterminer la limite en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=5-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

b. Déterminer la limite en 1 de la fonction g définie sur $]-\infty;1[$ par $g(x)=\dfrac{2x+3}{-x^2+3x-2}$.

Exemples A6 et A7

Corrigé en vidéo : mathemathieu.fr/tsm-lf-exa67-corvid

p. 199 SF5

a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3+x^2-1$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{5x^2+x+2}$.

II.4 Limite d'une fonction composée

DÉFINITION

Soient g une fonction définie sur une partie J de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x de I, $u(x) \in$ J.

La fonction composée de u par g, notée $g \circ u$, est définie sur I par $(g\circ u)(x)=g(u(x))$.

$$g\circ u : \begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \to & \mathrm{J} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \end{array}$$

THÉORÈME (ADMIS)

Soient α, β, γ trois nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} h(x)=\gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (h\circ g)(x)=\gamma$.

Exemple C3

Soit f la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}+2x}$.

Déterminer, si elle existe : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemple A8

p. 229 SF1

f est la fonction définie sur $]14;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x-5}-3}$.

Étudier la limite éventuelle de f en 14.

Exemple A9

tsm-lf-exa9-cor

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$.

III. Limites et comparaison

III.1 Théorèmes de comparaison

THÉORÈMES (ADMIS)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, voisinage de α (où α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

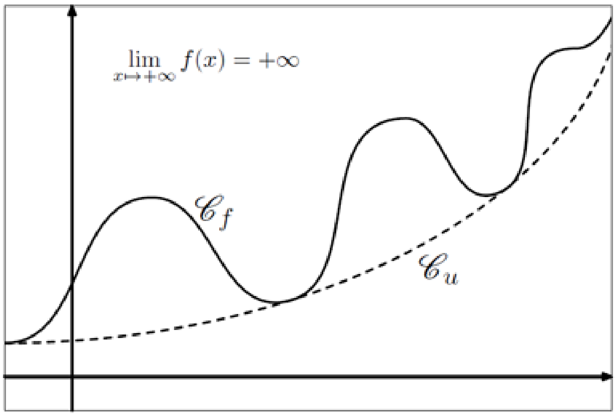
- Si : $\forall\ x \in \mathrm{I},\ g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$

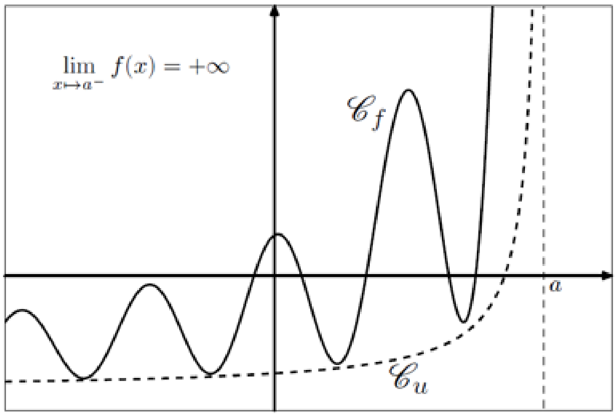
  alors

- Si : $\forall\ x \in \mathrm{I},\ g(x) \geqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$

  alors

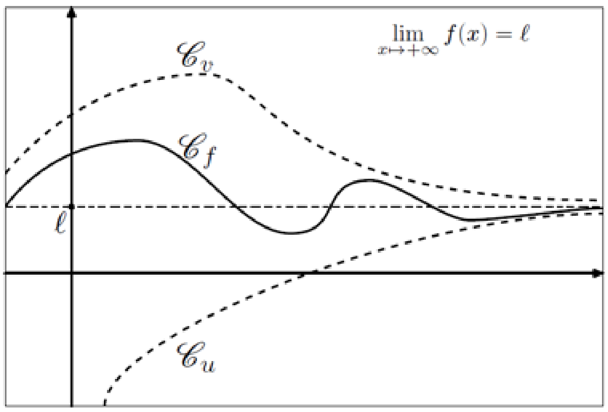
Illustrations du premier théorème :

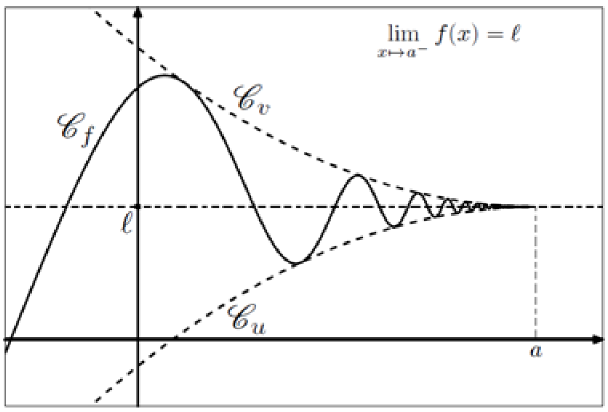




source des images : chingatome.net

III.2 Théorème des gendarmes





source des images : chingatome.net

THÉORÈME DES GENDARMES (OU D'ENCADREMENT) (ADMIS)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, voisinage de α (où α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

Si : $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$

alors

EXEMPLES A10 À A12

p. 201 SF6

a. Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(x)$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-x}$.

c. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $h(x) = \dfrac{2x^2 + \sin(x)}{x-1}$.

IV. Exponentielle et croissance comparée

PROPRIÉTÉS

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Démonstrations : **a)** DÉMO. EX. tsm-lf-demo1 < 11 min ou p. 202

Idée : démontrer que $\mathrm{e}^x > x$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le résultat par comparaison

Idée : démontrer que $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le résultat par comparaison

b) $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

Par quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$ d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Démonstration : **a)** DÉMO. EX. tsm-lf-demo2 < 10 min ou p. 202

Idée : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1}}{x^n}$ et $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ dès que $x > 0$.

On obtient donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}}$ et, par comparaison, on obtient le résultat.

REMARQUE : on dit parfois que « **en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances x^n** ».

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

• Fiche bilan → p.204

• QCM 10 questions corrigées → p.205

• Exercices corrigés → 41 à 51 p.206

• 2 exercices type Bac guidés & corrigés → 175 et 176 p.220

• Quatre exercices corrigés → tsm-lf-4exoscor

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
→ maths-et-tiques : tsm-lf-ym
→ jaicompris.com : tsm-lf-jaicompris