CALCULS DE DÉRIVÉES (PARTIE 1) : **EXERCICES**

Sources de certains exercices : lyc58-pierregillesdegennes.ac-dijon.fr et www.pyromaths.org

Exercice 1 : une propriété bien utile

1. Démontrer la propriété suivante :

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels.
>
> On note J l'intervalle formé de tous les réels x tels que $ax+b \in$ I .
>
> La fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est définie et dérivable sur J , et sa dérivée est la fonction :
>
> $$x \mapsto a f'(ax+b)$$

2. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=\sqrt{3x+4}$; $g(x)=(-7x+8)^{15}$; $h(x)=-3x^2+\sqrt{-3x+1}$; $\mathrm{i}(x)=(8x+15)^3-(15x+8)^3$.

Exercice 2 : dérivabilité en un nombre

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x+20}{x+6} & \text{si } x<2 \\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{19}{4} & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

2. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Si oui, déterminer $f'(0)$ puis une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0.

3. On considère la fonction g définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x-1}$.
Cette fonction g est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 3 : extrema d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{15}-10x-\dfrac{10}{x}$.

Déterminer le minimum de f sur $]-\infty\,;0[$ et son maximum sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 4 : calculs de dérivées

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, et leurs fonctions dérivées :

1. $f(x)=3x^4-2x^3+5x-4$ **2.** $g(x)=\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

3. $h(x)=\dfrac{x+5}{x^2+1}$ **4.** $i(x)=(2x^2+3)(3x^3-7)$

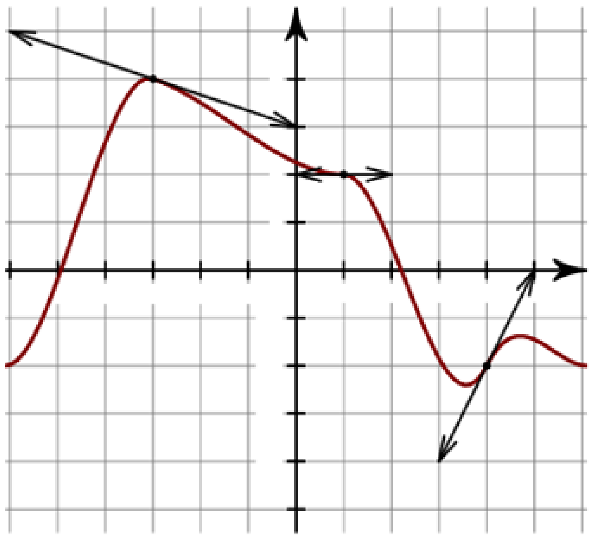
5. $j(x)=\left(\dfrac{2x+4}{3x-1}\right)^2$ **6.** $k(x)=\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$.

Exercice 5 : nombre dérivé (lecture graphique) & lien tangente/courbe

1. Déterminer graphiquement les nombres dérivés de la fonction f en $x=-3$ $x=1$ $x=4$.
2. On considère le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-1	3	5
$g(x)$	-4	-3	-4	2
$g'(x)$	1	$\frac{-3}{2}$	0	2

   a) Dans un nouveau repère, placer les points de la courbe $\mathcal{C}_g$ ainsi connus.
   b) Tracer les tangentes à $\mathcal{C}_g$ en ces points.
   c) Donner une allure possible de la courbe $\mathcal{C}_g$.

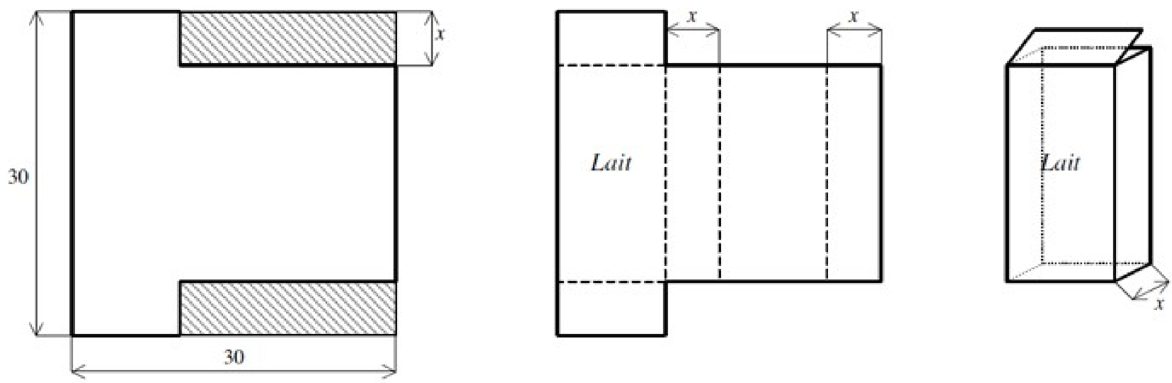


Exercice 6 : variations d'une fonction homographique et d'un polynôme de degré 3

1. On considère la fonction k définie sur $I=[-10\ ;\ -1]$ par $k(x)=\dfrac{-x-2}{-4x+2}$.
   a) Justifier que k est définie et dérivable sur I.
   b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x\in[-10\ ;\ -1]$.
   c) En déduire le sens de variations de k sur I.
2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x)=2x^3+30x^2+144x+3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Exercice 7 : un problème classique

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^3-30x^2+225x$.
   a) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique C_f de f en son point d'abscisse 0.
   c) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
   d) Tracer Δ et C_f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
2) Un fabriquant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hachurées sur la figure) de même largeur x (en centimètres) dans une feuille carrée de côté 30 cm.

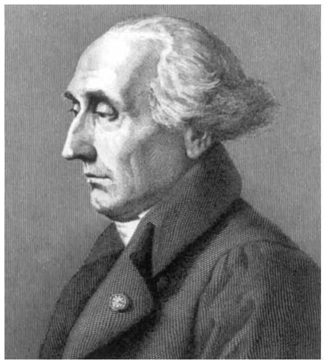


   a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   b) Calculer le volume de la boîte lorsque $x=10$.
   c) Exprimer le volume V de la boîte en fonction de x.
   d) Si le fabriquant désire des boîtes à base carrée, quelle valeur de x doit-il choisir ?
   e) Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

COMPLÉMENTS

Jean le Rond d'Alembert
[1717, Paris – 1783, Paris]

On lui doit la définition rigoureuse du nombre dérivé.



Giuseppe Lodovico Lagrangia
[1736, Turin – 1813, Paris]
dit « Joseph Louis Lagrange »

On lui doit les notations $f(x)$ *et* $f'(x)$.

Giuseppe Lodovico Lagrangia est né le 25 janvier 1736 à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne.
Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française).

Son père dispose d'une position sociale favorable auprès du roi de Sardaigne, mais il a perdu beaucoup d'argent dans une spéculation hasardeuse. Lagrange étudia brillamment à l'université de sa ville natale; **son intérêt pour les mathématiques ne se manifeste que vers 17 ans**, à la lecture d'un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. **Il se plonge alors aussitôt, seul et sans aide, dans l'étude des mathématiques**.

Très rapidement, il obtient des résultats probants.
A l'été 1755, deux ans seulement après le début de ses travaux, il écrit une longue lettre à Euler (alors le plus grand mathématicien vivant) sur la détermination de la courbe tautochrone[1] (*i.e.* la courbe telle que deux mobiles identiques lâchés au même moment en des points différents de la courbe arrivent au point le plus bas au même moment). Cette courbe (une cycloïde) a été déterminée pour la première fois par Huyghens, mais la méthode que propose Lagrange pour l'obtenir est beaucoup plus générale, et donnera naissance au "Calcul des variations"[2]. Cet échange est le prémisse d'une riche correspondance entre Lagrange et Euler, marquée par un respect mutuel important.

A la fin de cette même année 1755, Lagrange devient professeur à l'école d'artillerie de Turin, ville où il fonde en 1757 une académie des sciences. Son talent est très vite reconnu, et il écrit durant ses premières années de brillants mémoires.
En 1764 notamment, Lagrange gagne le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris, pour son travail sur les librations de la lune, c'est-à-dire les petites perturbations de son orbite, et sur ce phénomène étrange qui fait que la lune présente toujours la même face à la terre.
Lagrange deviendra un véritable habitué de ce prix, le gagnant à nouveau en 1772, 1774 et 1780.

En 1766, grâce à l'appui de d'Alembert, Lagrange succède à Euler au poste prestigieux de **directeur des mathématiques à l'Académie des Sciences de Berlin**. Il passera 20 ans là-bas, d'une extraordinaire fertilité.
Hormis quelques arrêts dus à une santé fragile, il publie avec une régularité impressionnante des mémoires qui touchent tous les domaines des mathématiques et de la mécanique : **astronomie**, **probabilités**, **théorie des équations algébriques**.
Lagrange excelle particulièrement en **arithmétique**, en résolvant plusieurs conjectures difficiles dues à Fermat, et en prouvant que tout entier naturel est somme de 4 carrés.

Dans une perspective plus historique, Lagrange est à la transition entre l'époque d'Euler, où l'on publie à tout va sans trop se soucier de la rigueur, et le dix-neuvième siècle, où sous l'impulsion de Gauss, Cauchy et Weierstrass, la rigueur devient au centre des mathématiques.

1 Le mot tautochrone vient des mots grec "tauto" (le même) et "chronos" (le temps).
2 http://www.futura-sciences.com/fr/definition/t/mathematiques-2/d/calcul-variationnel_10313/

La vie privée de Lagrange est peut-être moins heureuse. Il souffre parfois de dépression, et s'il se marie en 1767 avec une de ses cousines (il est veuf en 1783), il n'a pas d'enfants, et on dit que ce mariage est peu heureux.
Les dernières années à Berlin sont consacrées à l'étude du monumental *Traité de Mécanique Analytique*, où il reprend, complète et unifie les connaissances accumulées depuis Newton.

En 1787, après la mort de l'Empereur Frédéric II, Lagrange part pour la France où il devient membre de l'Académie des Sciences de Paris. Il est un des rares à traverser la Révolution sans être inquiété : il est même Président de la Commission des poids et des mesures, et est à ce titre un des pères du système métrique et de l'adoption de la division décimale des mesures.
Les événements le marquent cependant beaucoup, en particulier le guillotinage du chimiste Lavoisier, au sujet duquel il déclare : « Il a fallu un instant pour couper sa tête, et un siècle ne suffira pas pour en produire une si bien faite ».

Lagrange participe encore à la création de l'Ecole Polytechnique, provisoirement nommée Ecole Centrale des Travaux Publics, dont il est le premier professeur d'analyse, d'ailleurs peu apprécié.

Il se remarie en 1792 avec une jeune fille qui lui est toute dévouée.

Il décède le 10 avril 1813, après avoir reçu de Napoléon Ier tous les honneurs de la nation française (comte de l'empire, Grand Officier de la Légion d'Honneur).

Remarques : **son nom est gravé sur la tour Eiffel**, puisqu'il appartient à la liste des soixante-douze noms de savants inscrits dessus. Autres hommages : un cratère lunaire porte son nom ; l'astéroïde (1006) *Lagrangea* a été nommé en son honneur ; il est inhumé au Panthéon de Paris ; une rue du 5e arrondissement de Paris porte son nom.

Source de la biographie : http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=lagrange