Tle spé

SUITES ET RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE
4 EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES : CORRECTION

EXERCICE 1

a) Pour tout entier naturel n, on a

$2-\frac{5}{u_n+4}=\frac{2(u_n+4)-5}{u_n+4}=\frac{2u_n+3}{u_n+4}=u_n$.

b) On considère la propriété (P_n) définie par : $0\leq u_n\leq 2$.

Initialisation : (P_0) est vraie : $u_0=0$ et $0\leq 0<2$;

Hérédité : supposons (P_n) vraie pour un certain entier n et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $0\leq u_n\leq 2$, d'où

$4\leq u_n+4\leq 6$, d'où $\frac{-5}{4}\leq\frac{-5}{u_n+4}\leq\frac{-5}{6}$, d'où $2-\frac{5}{4}\leq 2-\frac{5}{u_n+4}\leq 2-\frac{5}{6}$, d'où $0<\frac{3}{4}\leq u_{n+1}\leq\frac{7}{6}<2$; donc (P_{n+1}) est vraie ; ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $0\leq u_n\leq 2$.

c) On a $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3}=\frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12}=\frac{u_n-1}{5u_n+15}=\frac{1}{5}v_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1/5 et de premier terme $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+3}=\frac{-1}{3}$.

d) Donc $v_n=\frac{-1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{-1}{3\times 5^n}$.

e) On a $(u_n+3)v_n=u_n-1$, d'où $u_n(v_n-1)=-3v_n-1$, d'où $u_n=\frac{-3v_n-1}{v_n-1}=\frac{\frac{1}{5^n}-1}{\frac{-1}{3\times 5^n}-1}$.

EXERCICE 2

1. a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=2n+3\geqslant 3>0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrons que, pour tout entier naturel n, $u_n>n^2$:

Initialisation : pour $n=0$, $u_0=1>0^2$, donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité: supposons que pour une valeur de n, $u_n>n^2$; alors $u_{n+1}=u_n+2n+3>n^2+2n+3=n^2+2n+1+2=(n+1)^2+2>(n+1)^2$. Donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $u_n>n^2$.

2. a) Les quatre premiers termes de la suite : $u_0=1$, $u_1=u_0+2\times 0+3=4=2^2$, $u_2=u_1+2\times 1+3=9=3^2$, $u_3=u_2+2\times 2+3=16=4^2$.

b) On conjecture que pour tout entier naturel n, $u_n=(n+1)^2$.

c) Démontrons cette conjecture par récurrence :

Initialisation: $u_0=1=(0+1)^2$, donc a propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : supposons que pour une valeur de n, $u_n=(n+1)^2$;

alors $u_{n+1}=u_n+2n+3=(n+1)^2+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2$. Donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $u_n=(n+1)^2$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_{n+1}-u_n$.

a) On sait que $u_{n+1}=u_n+2n+3$, donc $v_n=u_{n+1}-u_n=2n+3$. Donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0=3$.

b) La somme des vingt premiers termes de la suite (v_n) est égale à $\sum_{k=0}^{k=19}v_k=20\times\frac{v_0+v_{19}}{2}=10(3+41)=440$.

On peut aussi remarquer que $\sum_{k=0}^{k=19}v_k=u_{20}-u_0=21^2-1=440$.

EXERCICE 3

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = -2 + 3 = 1$.

2. Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = v_n - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3 - (\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n(\frac{2}{3} - 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{-1}{3}$ qui est strictement négatif, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$. Ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. On a $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = -2 + \frac{2}{3} - 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 = -2 + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3n =$

$$-2 - 3n + \frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = -2 - 3n + 2\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = -3n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

EXERCICE 4

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$:
Initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$:
$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ avec $u_n > 0$ et $\sqrt{u_n^2+1} > 0$, donc $u_{n+1} > 0$. Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. Pour tout entier naturel n, comme pour tout entier naturel n, $u_n > 0$; on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\times\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}$. Or, pour tout entier naturel n, $u_n^2+1 > 1$, d'où $\sqrt{u_n^2+1} > 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} < 1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_{n+1} < u_n$; ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Calcul des cinq premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_0 = 1 \ ; \ u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ u_2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ; \ u_3 = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \text{ et } u_4 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On conjecture que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

4. On démontre cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence :
Initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 1 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et on montre que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Sources : http://dominique.frin.free.fr/