T^le spé

SUITES ET RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE
4 EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Sources : http://dominique.frin.free.fr/

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n + 4}$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq 2$.

c) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ dont on précisera le premier terme.

d) Ecrire alors v_n en fonction de n.

e) Ecrire u_n en fonction de n.

EXERCICE 2

1. On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Étudier le sens de variations de la suite (u_n).

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

2. a) Calculer les quatre premiers termes de la suite.

b) Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n.

c) Démontrer cette conjecture.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = 2n + 3$.

b) Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite (v_n).

EXERCICE 3

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n - 1$.

La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n + 3$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3. En déduire les variations de la suite (u_n).
4. On définit la suite (s_n) par $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.
   Exprimer s_n en fonction de n.

EXERCICE 4

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Etudier les variations de la suite (u_n).
3. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n), et conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
4. Démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.