SUITES ET RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE
EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE CORRIGÉ

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 2$, $v_n = \dfrac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

a. Calculer v_0 ; u_1 ; v_1 ; u_2 et v_2. Donner les résultats sous forme de fraction irréductible.

b. En utilisant un tableur, une calculatrice ou un programme, donner un tableau de valeurs décimales approchées des suites (u_n) et (v_n) pour n variant de 1 à 10.

c. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

e. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$.

f. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

CORRECTION

a) $v_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{3}{2}$; $v_1 = \dfrac{4}{3}$; $u_2 = \dfrac{17}{12}$; $v_2 = \dfrac{24}{17}$.

b) Avec le tableur ou la calculatrice, on obtient rapidement :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	2	1,5	1,4166	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142
v_n	1	1,3333	1,4117	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142	1,4142

c) On note $\mathrm{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ ».

Initialisation

$u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé). On suppose que $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$ ».

D'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

donc $1+1 \leqslant u_n + v_n \leqslant 2+2$ *ie* $2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4$

donc $\dfrac{2}{2} \leqslant \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant \dfrac{4}{2}$ *ie* $\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2}$.

On en déduit que $u_{n+1} \neq 0$ et alors : $\dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{u_{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{2}$

donc $2 \geqslant \dfrac{2}{u_{n+1}} \geqslant 1$ *ie* $\boxed{2 \geqslant v_{n+1} \geqslant 1}$.

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion

D'après le raisonnement par récurrence :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u_n)$ et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

d) Facile en remarquant que $u_n v_n = 2$ (car $v_n = \dfrac{2}{u_n}$).

e) D'après le c) $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier naturel *n*.

Donc $\dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0$ *ie* $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$.

Finalement, on a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant v_{n+1}$

ie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant v_n$.

Il reste à vérifier que $u_0 \geqslant v_0$ (facile) pour en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant v_n$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n \geqslant v_n$ donc $\dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant \dfrac{2 u_n}{2}$ *ie* $\dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant u_n$ *ie* $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc (u_n) est décroissante.

On a alors : $\dfrac{2}{u_{n+1}} \geqslant \dfrac{2}{u_n}$ *ie* $v_{n+1} \geqslant v_n$. Donc (v_n) est croissante.