Exercices (Suites) - Rappels de 1ère S

CORRECTION

Exercice 1

1) $u_0 = \frac{7\times 0-2}{0+4} = -\frac{1}{2}$; $u_1 = \frac{7\times 1-2}{1+4} = 1$; $u_2 = \frac{7\times 2-2}{2+4} = 2$.

2) $u_0 = 2$; $u_1 = 2u_0+3 = 7$; $u_2 = 2u_1+3 = 17$.

3) $u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$.

4) $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 2$.

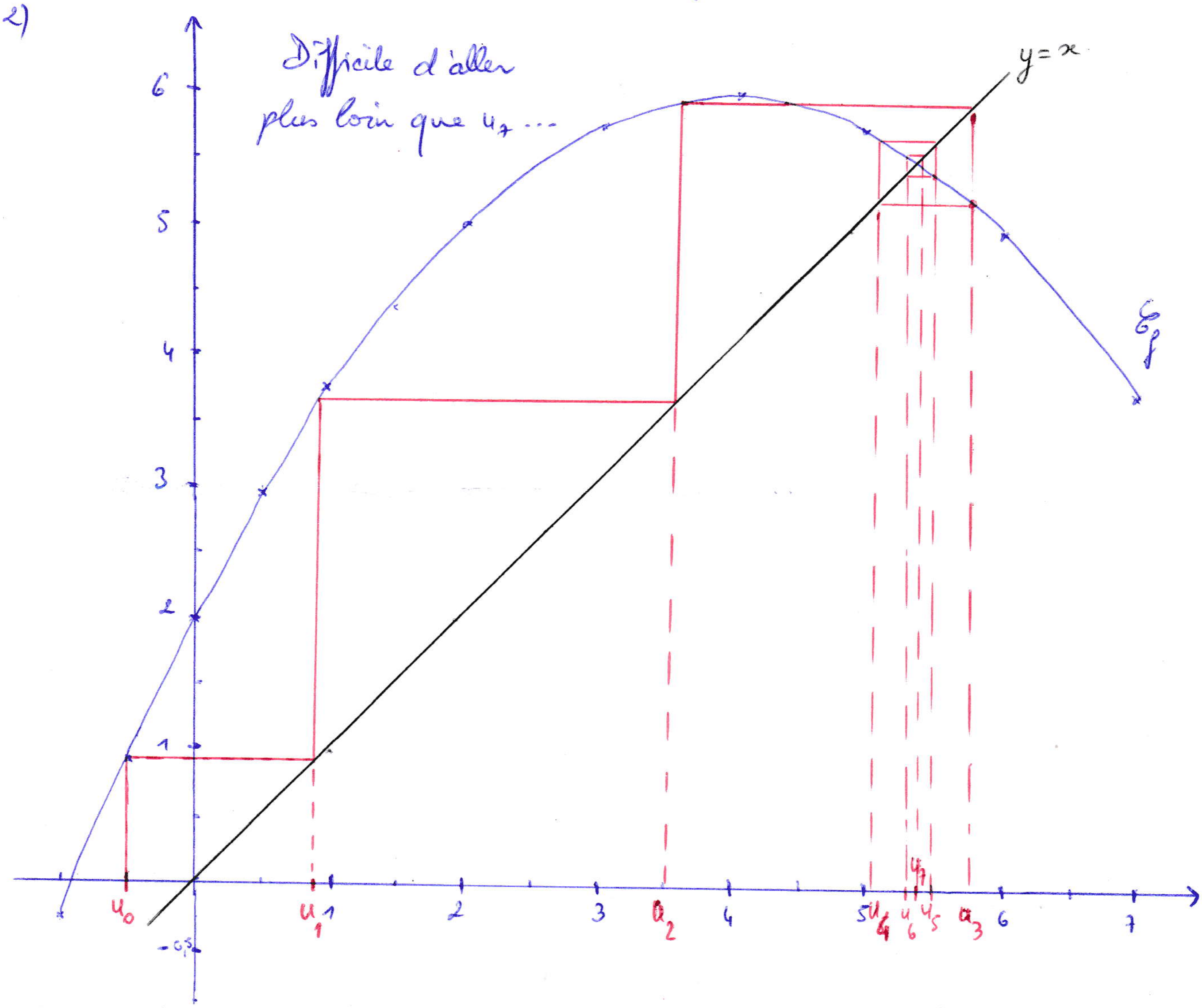
5) $u_1 = 1000$; $u_2 = 1000\times\left(1+\frac{2,5}{100}\right) = 1025$; $u_3 = u_2\times\left(1+\frac{2,5}{100}\right) = 1050,625$

Exercice 2

1) $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n^2 + 2u_n + 2$

3) (u_n) semble converger vers un réel proche de 5,3.

2)



Exercice 3

1) $u_n = -n^2 + 5n - 2$

1ère méthode : calculer $u_{n+1} - u_n$.

On arrive à $u_{n+1} - u_n = -2n + 4$.

Or : $-2n+4 < 0 \Leftrightarrow 4 < 2n$
$\Leftrightarrow n > 2$
$\Leftrightarrow n \geq 3$.

Donc à partir du rang 3, la suite (u_n) est strictement décroissante.

2ème méthode : étudier la fonction $f(x) = -x^2 + 5x - 2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x + 5$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc à partir du rang 3, (u_n) est strictement décroissante.

2) $v_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \cdots = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n+3 > 0$ et $n+2 > 0$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$ d'où : (v_n) est strictement croissante.

3) $u_n = \dfrac{3^n}{2}$

1ère méthode : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2} - \dfrac{3^n}{2} = \dfrac{3^{n+1} - 3^n}{2}$

$= \dfrac{3^n(3-1)}{2}$

$= 3^n$

Or $3^n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

donc (u_n) est s^t croissante.

2ème méthode : u_n ne s'annule jamais car $3^n > 0$.

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}/2}{3^n/2} = \cdots = 3$

Or, $3 > 1$ donc $u_{n+1} > u_n$

donc (u_n) est s^t croissante.

4) $z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

z_n ne s'annule jamais car :

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1^n}{2^n} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{1 = 0}_{\text{impossible}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{2}$

donc (z_n) est géom. de raison $\frac{1}{2}$ avec $0 < \frac{1}{2} < 1$

et le premier terme de la suite est 1, qui est strictement positif

donc (z_n) est s^t décroissante.

5) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$

Intuitivement, (u_n) ne s'annule jamais... (on verra un outil pour montrer cela)

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (suite st positive) donc $u_{n+1} < u_n$.

(u_n) est donc st décroissante.

6) $v_n = \frac{2^n}{n+1}$ Ici calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ conduit à $2 \frac{n+1}{n+2}$.

Difficile de montrer que $2 \times \frac{n+1}{n+2} > 1$ ... ?

Non, il faut juste écrire : $2 \times \frac{n+1}{n+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{2n+2}{n+2} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n}{n+2} > 0}_{\text{ceci est vrai etc ...}}$

Mais il reste à montrer que v_n ne s'annule pas, etc. $\longrightarrow$

Autre méthode : calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \ldots = \frac{n\,2^n}{(n+1)(n+2)}$$

y'a un peu de travail ;)

Or : $n \geqslant 0$; $2^n > 0$; $n+1 > 0$; $n+2 > 0$

donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

donc (v_n) est croissante.

7) Méthode 1

$f(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+4x+4}$

A rédiger : "la dérivée..."

On trouve : $f'(x) = \frac{4x(x+2)}{(x^2+4x+4)^2}$

x	0		$+\infty$
$4x$	0	$+$	
$x+2$		$+$	
$(x^2+4x+4)^2$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	

Donc (w_n) est croissante

Méthode 2

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} - w_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^2 - \left(\frac{n}{n+2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n+1}{n+3} + \frac{n}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} \times \frac{(n+1)(n+2) - n(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} \times \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

à détailler

Tous ces termes sont positifs donc $w_{n+1} - w_n > 0$

donc (w_n) est strictement croissante.

Méthode 3.

$w_n = 0 \iff \left(\frac{n}{n+2}\right)^2 = 0$

$\iff n^2 = 0$

$\iff n = 0$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, w_n ne s'annule pas.

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^2}{\left(\frac{n}{n+2}\right)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+3)^2} \times \frac{(n+2)^2}{n^2}$

Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1 \iff \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{(n+3)^2 \times n^2} > 1$

$\iff (n+1)^2 (n+2)^2 > (n+3)^2 \times n^2$ car $(n+3)^2 \times n^2 > 0$

$\iff \dots$ (développer)

$\iff \cancel{n^4} + \cancel{6n^3} + 13n^2 + 12n + 4 > \cancel{n^4} + \cancel{6n^3} + 9n^2$

$\iff 4n^2 + 12n + 4 > 0$

Or ceci est vrai car $n > 0$, $4n^2 > 0$ ...

Donc on a bien $\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$, d'où (w_n) est s^t croissante.

$\searrow$ donc, puisque $w_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (par déf.) : $w_{n+1} > w_n$

Exercice 4

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$n \geqslant 1$ donc $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$

$-1 \leqslant -\frac{1}{n} < 0$

$4 \leqslant 5 - \frac{1}{n} < 5$

donc $4 \leqslant u_n < 5$.

La suite (u_n) est donc bornée.

2) a) $u_n \leqslant 2 \iff \frac{2n-1}{n+2} \leqslant 2$

$\iff 2n-1 \leqslant 2(n+2)$ car $n+2 > 0$

$\iff 2n-1 \leqslant 2n+4$

$\iff -1 \leqslant 4$

On a bien $-1 \leqslant 4$, donc $u_n \leqslant 2$.

b) $\frac{1}{2} \leqslant u_n \iff \frac{2n-1}{n+2} \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff 2(2n-1) \geqslant n+2$ car $n+2 > 0$

$\iff 4n - 2 - n - 2 \geqslant 0$

$\iff 3n - 4 \geqslant 0$

$\iff n \geqslant \frac{4}{3}$

Donc à partir du rang 2, (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 5

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \cancel{5} - 2(n+1) - \cancel{5} + 2n$

$= \cancel{-2n} - 2 + \cancel{2n}$

$= -2$

Donc (u_n) est arithmétique de raison -2.

Exercice 6

1) S_1 : 14 termes $\quad S_2$: 13 termes $\quad S_3$: 4 termes $\quad S_4$: 17 termes

2) • $A = 1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (car somme de termes d'une suite arith. de raison 1)

• $B = 7+8+9+\dots+n = (n-7+1)\dfrac{7+n}{2} = \dfrac{(n-6)(n+7)}{2}$

car somme de termes d'une suite arith. de raison 1

Ou $B = 1+2+3+\dots+n - (1+2+3+4+5+6)$

$= \dfrac{n(n+1)}{2} - 21 = \dfrac{n(n+1)-42}{2} = \dfrac{n^2+n-42}{2}$

• $C = 1+q+q^2+q^3+\dots+q^n$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ 1+1+1^2+1^3+\dots+1^n & \text{si } q=1 \end{cases}$$ ← Somme de termes d'une suite géom. de raison q

$$= \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q=1 \end{cases}$$

• $D = \sum_{k=5}^{11} 2^k = 2^5+2^6+\dots+2^{11}$

$= 2^5 \times \dfrac{1-2^{11-5+1}}{1-2}$ ← somme de termes d'une suite géom. de raison 2

$= 32 \times \dfrac{1-2^7}{-1} = 32(2^7-1) = 32 \times 127 = 4064$

Avec la calculatrice CASIO, taper $\Sigma(2\text{^}X, X, 5, 11)$. On trouve 4064.

• $S_1 = u_0+u_1+\dots+u_{13} = 14 \times \dfrac{u_0+u_{13}}{2} = 14 \times \dfrac{2+(2+13\times 1{,}1)}{2} = 14 \times \dfrac{2+16{,}3}{2} = 128{,}1$

• $S_2 = u_1+u_2+\dots+u_{13} = u_1 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = 1{,}1 \times \dfrac{1-2^{13}}{-1} = 1{,}1(2^{13}-1) = 9010{,}1$

• $S_3 = u_{10}+u_{11}+\dots+u_{13} = (13-10+1) \times \dfrac{u_{10}+u_{13}}{2} = 4 \times \dfrac{1000+(1000+3\times 0{,}5)}{2} = 4003$

Mais il y a plus simple : $S_3 = 1000 + 1000{,}5 + 1001 + 1001{,}5 = 4003$.

• $S_4 = u_{21}+u_{22}+\dots+u_{37} = u_{21} \times \dfrac{1-\pi^{37-21+1}}{1-\pi} = \sqrt{2} \times \dfrac{1-\pi^{17}}{1-\pi}$

- $S_5 = \underbrace{1^2-2^2} + \underbrace{3^2-4^2} + \underbrace{5^2-6^2} + \dots + \underbrace{2013^2-2014^2} + 2015^2$

$= (1+2)(1-2) + (3+4)(3-4) + (5+6)(5-6) + \dots + (2013+2014)(2013-2014) + 2015^2$

$= \underbrace{-3 - 7 - 11 - \dots - 4027} + 2015^2$

On remarque que ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme -3 et de raison -4.

On note $I = -3-7-11 - \dots -4027$.

Combien de termes dans I ? On a $\frac{4027-3}{4} = 1006$ donc termes.

Autre méthode : on note $v_0 = -3$ et $v_1 = -7$, $v_2 = -11$, ...

donc $v_n = v_0 + n \times (-4) = -3-4n$.

Alors : $-4027 = -3-4n \iff \frac{-4027+3}{-4} = n$

$\iff 1006 = n$

Donc $I = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{1006}$

donc il y a 1007 termes

On a donc : $S_5 = 1007 \times \frac{-3+(-4027)}{2} + 2015^2$

$= -2\,029\,105 + 4\,060\,225$

$S_5 = 2\,031\,120$.

Exercice 7

1) $u_0 = 0^4 - 6\times 0^3 + 11\times 0^2 - 5\times 0$

$u_0 = 0$

$u_1 = 1^4 - 6\times 1^3 + 11\times 1^2 - 5\times 1$

$= 1 - 6 + 11 - 5$

$u_1 = 1$

De même : $u_2 = 2^4 - 6\times 2^3 + 11\times 2^2 - 5\times 2 = 2$

et $u_3 = 3^4 - 6\times 3^3 + 11\times 3^2 - 5\times 3 = 3$.

$u_4 = \dots = 28$

non demandé mais utile ici

2) $u_1 - u_0 = 1-0 = 1$

et $u_4 - u_3 = 28-3 = 25$

donc $u_1 - u_0 \neq u_4 - u_3$.

Donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 8

1) $u_0 = 5\times 0 - 3 = -3$; $u_1 = 5\times 1 - 3 = 2$; $u_2 = 5\times 2 - 3 = 7$; $U_3 = 5\times 3 - 3 = 12$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) \cancel{-3} - 5n \cancel{+3}$
$= \cancel{5n} + 5 - \cancel{5n}$
$= 5$

Donc (u_n) est arith. de raison 5 et de premier terme $u_0 = -3$.

3) $5 > 0$ donc la suite arithmétique (u_n) est strictement croissante.

4) $S = \sum_{k=0}^{97} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{97}$
$= 98 \times \frac{u_0 + u_{97}}{2}$
$= 98 \times \frac{-3 + ((-3) + 97 \times 5)}{2}$
$= 98 \times \frac{479}{2}$
$S = 23471$

Exercice 9

1) $u_0 = 4$; $u_1 = \frac{u_0}{2} = \frac{4}{2} = 2$; $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1}{2}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$.

Donc (u_n) est géom. de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

3) $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc (u_n) est strictement décroissante.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Alors : $u_n = \frac{1}{32768} \iff 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{32768} \iff \frac{4}{2^n} = \frac{1}{32768} \iff 4 \times 32768 = 2^n$
$\iff 131072 = 2^n$

A la calculatrice on trouve alors : $u_n = \frac{1}{32768} \iff n = 17$.

Donc $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32768} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17} = \sum_{k=0}^{17} u_k$
$= u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}}{\frac{1}{2}}$
$= 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}\right) = 8\left(1 - \frac{1}{262144}\right) = 8 \times \frac{262143}{262144}$
$= \frac{8 \times 262143}{8 \times 32768} = \frac{262143}{32768}$ (simplifié car PGCD = 1)

Exercice 10

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$u_n = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n = 2^n(2^3 - 2^1 + 1) = 2^n(8-2+1) = 7 \times 2^n$.

Donc u_n est de la forme $u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 7$ et $q = 2$.

Donc (u_n) est géométrique de raison 2.

Ou alors : $u_{n+1} = 7 \times 2^{n+1}$ donc $u_{n+1} = 7 \times 2^n \times 2 = 2 \times (7 \times 2^n) = 2u_n$

donc (u_n) est géom. de raison 2.

Exercice 11

1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = 2v_{n+1} + 6$

$= 2\left(\frac{2}{3}v_n - 1\right) + 6$

$= \frac{4}{3}v_n + 4$

$= \frac{2}{3}(2v_n + 6)$

$= \frac{2}{3}w_n$ Donc (w_n) est géom. de raison $\frac{2}{3}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = w_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ avec $w_0 = 2v_0 + 6 = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = 3$

donc $w_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Alors on a : $2v_n + 6 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d'où $v_n = \dfrac{3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6}{2}$

$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$. $\left(\text{car } \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$

Exercice 12

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors : $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$.

Or $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$

donc $u_{n+1} = u_n + u_n$

$= 2u_n$ Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est géom. de raison 2.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times 2^{n-1}$ avec $u_1 = u_0 = 1$

d'où : $u_n = 2^{n-1}$

Exercice 13

1) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$.

Il est "évident"* que (u_n) est positive : $u_n > 0$.

*le raisonnement par récurrence permettra de le prouver rigoureusement !

En effet, d'un terme à l'autre, on ajoute 1, on divise, on multiplie par 2 en partant de $u_0 = 3$...

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -1$. Donc (u_n) est bien définie.

2) $u_0 = 3$; $u_1 = \dfrac{2}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{1+u_1} = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}$

Alors :
- $\left.\begin{aligned} u_1 - u_0 &= \tfrac{1}{2} - 3 = -\tfrac{5}{2} \\ u_2 - u_1 &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6} \end{aligned}\right)$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
- $\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{u_2}{u_1} &= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3} \end{aligned}\right)$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \dfrac{2-1-u_n}{2+2+2u_n}$

$$= \frac{1-u_n}{2(2+u_n)}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= -\frac{1}{2} v_n$$

donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ avec $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2}{5}$

$v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Donc on a : $\dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ soit $(u_n + 2)\left(\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = u_n - 1$

$$\left(\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) u_n + \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = u_n - 1$$

$$\left(\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) u_n = -1 - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Cette écriture se simplifie peu même avec des "astuces"...

$$u_n = \frac{-1 - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$