

INTERVALLE(S) DE CONFIANCE : EXERCICES CORRECTION

Exercice 1 *Faire du cinéma ou faire de la politique*

1. On pose $n=100$ et $f=0,53$.

$$n \geq 30 ; n f = 53 \text{ et } n(1-f) = 47 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5$$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion p de la population qui est favorable à cet emplacement :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,53 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,53 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,43 ; 0,63].$$

On ne peut donc pas conclure que la majorité de la population est favorable à cet emplacement.

2. L'intervalle de confiance devient : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,53 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,53 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] = [0,4852 ; 0,5748].$

On ne peut toujours pas conclure que la majorité de la population est favorable à cet emplacement.

3. $0,53 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0,5 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,03 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,03} \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{0,03} \right)^2$

Or, $\left(\frac{1}{0,03} \right)^2 \approx 1111,11$ donc à partir d'un sondage qui interroge 1112 personnes, on peut estimer, au niveau de confiance de 95 %, que la majorité de la population est favorable à cet emplacement

Exercice 2 *Des résultats qui ne doivent rien au hasard*

1. On pose $n=45$ et $f = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

$$n \geq 30 ; n f = 25 \text{ et } n(1-f) = 20 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5.$$

Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{5}{9} - \frac{1}{\sqrt{45}} ; \frac{5}{9} + \frac{1}{\sqrt{45}} \right] \approx [0,4064 ; 0,7047].$$

Le jury décide de modifier le barème car $0,4064 < 0,9$.

2. On pose $n=36$ et $f = \frac{25}{36}$.

$$n \geq 30 ; n f = 25 \text{ et } n(1-f) = 11 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5.$$

Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{25}{36} - \frac{1}{\sqrt{36}} ; \frac{25}{36} + \frac{1}{\sqrt{36}} \right] \approx [0,5277 ; 0,8612].$$

Le jury ne doit donc pas accepter le nouveau barème.

3. $\left(f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$ donc l'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,2} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 10 \Leftrightarrow n \geq 100$$

donc pour que l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 ait une amplitude d'au plus 0,2, il faudrait que la taille de l'échantillon dépasse 100 personnes.

Exercice 3 *Au coude-à-coude*

$$\left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ donc l'amplitude de l'intervalle de confiance (niveau de confiance de 95 \%)}$$

$$\text{est } \frac{2}{\sqrt{n}} : \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,01} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 200 \Leftrightarrow n \geq 40\,000.$$

Donc pour obtenir une estimation aussi précise des intentions de vote, il faudrait un échantillon d'au moins 40 000 personnes.

Exercice 4 *Satisfait ou remboursé*

On pose $n=140$ et $f=\frac{99}{140}$.

$$n \geq 30 ; n f = 99 \text{ et } n(1-f) = 41 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5$$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion p de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{99}{140} - \frac{1}{\sqrt{140}}; \frac{99}{140} + \frac{1}{\sqrt{140}}\right] \approx [0,6226; 0,7917].$$

Exercice 5 *Germer ou ne pas germer...*

1. On pose $n=200$ et $f=\frac{185}{200}$.

$$n \geq 30 ; n f = 185 \text{ et } n(1-f) = 15 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5$$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) du taux de germination

$$p_a \text{ du lot de semences de l'année : } \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{185}{200} - \frac{1}{\sqrt{200}}; \frac{185}{200} + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,8542; 0,9958].$$

2. On pose $n=200$ et $f=\frac{150}{200}$.

$$n \geq 30 ; n f = 150 \text{ et } n(1-f) = 50 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5$$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) du taux de germination p_b du lot de semences de l'année précédente :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{150}{200} - \frac{1}{\sqrt{200}}; \frac{150}{200} + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,6792; 0,8208].$$

3. Les deux intervalles ne se recoupent pas, on peut donc conclure à une différence de taux de germination entre les semences des deux origines. Il faudra alors les semer séparément.

Exercice 6 *Ne tirer aucune conclusion*

Première approche : $\frac{37}{120} \approx 0,31$ et $\frac{320}{1002} \approx 0,32$ donc on peut penser que les deux joueurs sont proches, avec un léger avantage pour Julie.

Approche avec le cerveau allumé : on pose $n=120$ et $f=\frac{37}{120}$.

$$n \geq 30 ; n f = 37 \text{ et } n(1-f) = 83 \text{ donc } n f \geq 5 \text{ et } n(1-f) \geq 5$$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion d'atteinte de la cible pour Johan :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{37}{120} - \frac{1}{\sqrt{120}}; \frac{37}{120} + \frac{1}{\sqrt{120}} \right] \approx [0,2170; 0,3997].$$

De même pour Julie : $\left[\frac{320}{1002} - \frac{1}{\sqrt{1002}}; \frac{320}{1002} + \frac{1}{\sqrt{1002}} \right] \approx [0,2877; 0,3510].$

Les deux intervalles se recoupent, on ne peut donc rien conclure. Sauf peut-être que Julie ferait mieux de se calmer, faut pas déconner... Johan ne dira rien, car il drague certainement Julie... À vous d'imaginer la suite de l'histoire.

Plus sérieusement, c'est quoi un bon tireur de fléchettes ? Quelqu'un qui atteint souvent la cible ? N'importe quoi, il vaut peut-être mieux l'atteindre moins souvent mais obtenir le maximum de points. De plus, à quoi bon comparer des statistiques aussi différentes, et alors que Julie a lancé 1 002 fléchettes et Johan seulement 120. C'est du grand n'importe quoi ! Cet exercice est nul, il m'énerve.

Exercice 7 *Automatiquement satisfait*

On pose $n=860$ et $f=\frac{763}{860}$.

$n \geq 30$; $nf=763$ et $n(1-f)=97$ donc $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion de clients satisfaits par la mise en place de caisses automatiques :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{763}{860} - \frac{1}{\sqrt{860}}; \frac{763}{860} + \frac{1}{\sqrt{860}} \right] \approx [0,8531; 0,9214].$$

$0,8531 < 0,9$ donc le sondage remet en question l'affirmation du gérant, bien que 0,9 appartienne à l'intervalle. Le gérant devrait plutôt afficher « *environ 90 % des clients de notre magasin...* ».

Exercice 8 *QCM*

Réponse d.

$$\left(f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ donc l'amplitude de l'intervalle de confiance (niveau de confiance de 95 \%) est}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} : \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 50 \Leftrightarrow n \geq 2500.$$