DÉMONTRER L'ÉGALITÉ DE 2 EXPRESSIONS

I. Différentes méthodes

Nous allons voir différentes méthodes pour démontrer une égalité de 2 expressions (vous êtes très souvent confrontés à cette situation en devoirs surveillés).

I.1 Partir d'une expression et arriver à l'autre

Exercice I.1.1

Démontrer que, pour tout réel x : $(2x-3)(x+5)=2x^2+7x-15$.

Exercice I.1.2

Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]2;+\infty[$: $\dfrac{5x-1}{x-2}=5+\dfrac{9}{x-2}$.

I.2 Montrer que leur différence est nulle

Exercice I.2.1

Démontrer que, pour tout réel x de $]2;+\infty[$: $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\dfrac{x+3}{x+1}$.

I.3 Montrer qu'elles sont égales à une même expression

Exercice I.3.1

Démontrer que, pour tout réel x : $(x-3)(x+2)-x^2+x(x-4)=(x-6)(x+1)$.

I.4 Montrer que leurs carrés sont égaux (expressions de même signe seulement !)

Exercice I.4.1

1. Démontrer que, pour tout couple de réels $(u;v)$ tel que u et v sont de même signe : $u=v \Leftrightarrow u^2=v^2$.

2. Démontrer que, pour tout réel x positif : $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}$.

II. À vous de jouer !

Exercice II.1

Démontrer que, pour tout réel x : $x^2-12x+35=(x-5)(x-7)$.

Exercice II.2

Démontrer que, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$: $2+\dfrac{x^2-2}{x+1}=x+1-\dfrac{1}{x+1}$.

Exercice II.3

Démontrer que, pour tout réel x de $]2;+\infty[$: $3x+1-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3x^2-5x-3}{x-2}$.

Exercice II.4

Démontrer que, pour tout réel x de $]2;+\infty[$: $\sqrt{x^2+3}-x=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$.

Exercice II.5 *(extrait d'un DS)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(10-x)$.
Montrer que : $f(x)=25-(x-5)^2$.

Exercice II.6 *(extrait d'un DS)*

On considère la fonction f définie sur [0 ; 6[par : $f(x)=x\sqrt{3}(12-2x)$.
1. Calculer $f(3)$.
2. Montrer que, pour tout réel x de [0 ; 6[: $f(x)-f(3)=-2\sqrt{3}(x-3)^2$.

Exercice II.7 *(extrait d'un DS)*

1. On pose : $A_1=\frac{\pi}{8}x^2$ et $A_2=\frac{\pi}{8}(x^2-16x+64)$. On note : $f(x)=A_1+A_2$.

Montrer que : $f(x)=\frac{\pi}{4}(x^2-8x+32)$.

2. a) Montrer que $f(4)=4\pi$.
b) Montrer que $x^2-8x+32=(x-4)^2+16$.
c) D'après la question précédente, on a donc : $f(x)=\frac{\pi}{4}\left((x-4)^2+16\right)$.
Montrer que $f(x)-4\pi=\frac{\pi}{4}(x-4)^2$.

Exercice II.8 *(extrait d'un DS)*

On considère la fonction h définie pour tout réel x par : $h(x)=(3x+7)^2-(2x+3)^2$.
1. Démontrer que pour tout réel x : $h(x)=5(x+2)(x+4)$.
2. Démontrer que pour tout réel x : $h(x)=5x^2+30x+40$.
3. Démontrer que l'image de $-2+\sqrt{2}$ par la fonction h est égale à $10\sqrt{2}+10$.
4. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h.

III. Et si on ne sait pas si une égalité est vraie ou fausse ?

Il peut arriver que l'on se demande si une égalité est vraie, sans savoir si elle l'est ou pas...
Par exemple, il se peut que l'on doive savoir, pour conclure un raisonnement, si l'égalité suivante est vraie :

$$3-3\sqrt{2}=\frac{-3}{1+\sqrt{2}} \ ?$$

Dans ce cas là, on peut utiliser des équivalences pour nous aider dans notre recherche... L'idée est de transformer cette égalité pour se ramener :

- soit à une égalité vraie du type « 1 = 1 » et conclure que notre égalité de départ était donc vraie ;
- soit à une égalité fausse du type « 1 = 2 » et conclure que notre égalité de départ était donc fausse.

Exercice III.1

Alors, a-t-on $3-3\sqrt{2}=\frac{-3}{1+\sqrt{2}}$?