INTERVALLE(S) DE FLUCTUATION
CORRECTION ET DÉMOS

I. Définition

Exemple : en première partie de soirée, une série a attiré près de 6,2 millions de téléspectateurs soit 34 % de part d'audience. Paul pense faire un sondage auprès de 100 habitants de son village, pour savoir la proportion de ceux qui ont regardé cette série.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de 100 personnes ayant regardé la télévision en première partie de soirée.
Le nombre de téléspectateurs en première partie de soirée est suffisamment important pour considérer que la variable X suit la loi binomiale de paramètres $n =$ **100** et $p =$ **0,34** .
Le plus petit entier a tel que $\mathrm{p}(X \leqslant a) > 0{,}025$ est **25** .
et, le plus petit entier b tel que $\mathrm{p}(X \leqslant a) \geqslant 0{,}975$ est **43** .
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de taille 100 est donc :

$$\left[\frac{25}{100};\frac{43}{100}\right] \textit{ ie } \mathbf{[0{,}25\ ;\ 0{,}43]}\ .$$

Remarque : l'espérance de X est $n\,p = 34$, et $0{,}25 = 0{,}34 - 9$ et $0{,}43 = 0{,}34 + 9$.
L'écart-type de X est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{22{,}44} \approx 4{,}7371$.

De la même manière, déterminer un intervalle de fluctuation à 90 % :
Le plus petit entier a tel que $\mathrm{p}(X \leqslant a) > 0{,}05$ est **26** .
et, le plus petit entier b tel que $\mathrm{p}(X \leqslant a) \geqslant 0{,}95$ est **42** .
Un intervalle de fluctuation à 90 % de la fréquence des téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de taille 100 est donc : **[0,26 ; 0,42]** .

II. Intervalle de fluctuation asymptotique

II.2 Approximation à l'aide de la loi normale

ROC

PROPRIÉTÉ. Si $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$, alors pour tout $\alpha \in \,]0;1[$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p\left(F_n \in I_n\right)=1-\alpha}$$

où : $F_n=\dfrac{X_n}{n}$

$$I_n=\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right],$$

u_α désigne le réel tel que $p(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha)=1-\alpha$ où T ~ $\mathcal{N}$(0 ; 1).

Démonstration :

Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$ et $\alpha \in \,]0;1[$. On pose $Z_n=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

On admet qu'il existe un unique réel $u_\alpha>0$ tel que $p(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha)=1-\alpha$ (voir cours sur les lois normales, page 5).

1. D'après le théorème de Moivre-Laplace :

pour tous réels *a* et *b*, $\lim\limits_{n\to+\infty} p(a\leqslant Z_n\leqslant b)=p(a\leqslant T\leqslant b)$ où $T\sim\mathcal{N}(0;1)$.

Or, il existe un unique réel $u_\alpha>0$ tel que $p(-u_\alpha\leqslant T\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} p(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$.

2.
$$\begin{aligned}
p(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha)&=p\Big(-u_\alpha\leqslant\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant u_\alpha\Big)\\
&=p\big(np-u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\leqslant X_n\leqslant np+u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\big)\\
&=p\Big(\frac{np-u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant\frac{np+u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\Big)\ \text{car } n>0\\
&=p\Big(\frac{np-u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant\frac{np+u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}\Big)\\
&=p\Big(p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big)\ \text{car } \frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

3. D'où le résultat : $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\dfrac{X_n}{n}\in I_n\right)=1-\alpha$ où $I_n=\left[p-u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

D'après la propriété de la loi normale centrée réduite, on sait que $u_{0,05} \approx 1,96$, d'où :

DÉFINITION.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire fréquence est :

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a également vu que $u_{0,01} \approx 2,58$, donc on pourrait aussi dire qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,99 est :

$$\left[p-2,58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+2,58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

II.3 <u>Intervalle de fluctuation de la classe de Seconde</u>

En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$ par 1, on retrouve l'intervalle de fluctuation vu en Seconde :

$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

<u>Démonstration</u> :

On définit sur $[0;1]$ la fonction f par $f(p)=p(1-p)=-p^2+p$.

1. f est un polynôme donc est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(p)=-2p+1$ d'où :

p	0		1/2		1
$f'(p)$		+	0	–	
f	0	↗	1/4	↘	0

donc f admet un maximum lorsque $p=\frac{1}{2}$, qui vaut $\frac{1}{4}$.

2. On en déduit que, pour tout $p \in [0;1]$: $0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

La fonction racine carrée étant croissante, on a : $0 \leqslant \sqrt{p(1-p)} \leqslant \frac{1}{2}$

donc $0 \leqslant 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant 1,96\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}}$ d'où $1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. De même : $-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Donc $\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.