Un élève m'a fait remarquer que :

– le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$; l'aire du disque correspondant est πr^2.

Or la dérivée de πr^2 est $2\pi r$.

– le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$; la surface de la sphère correspondante est $4\pi r^2$.

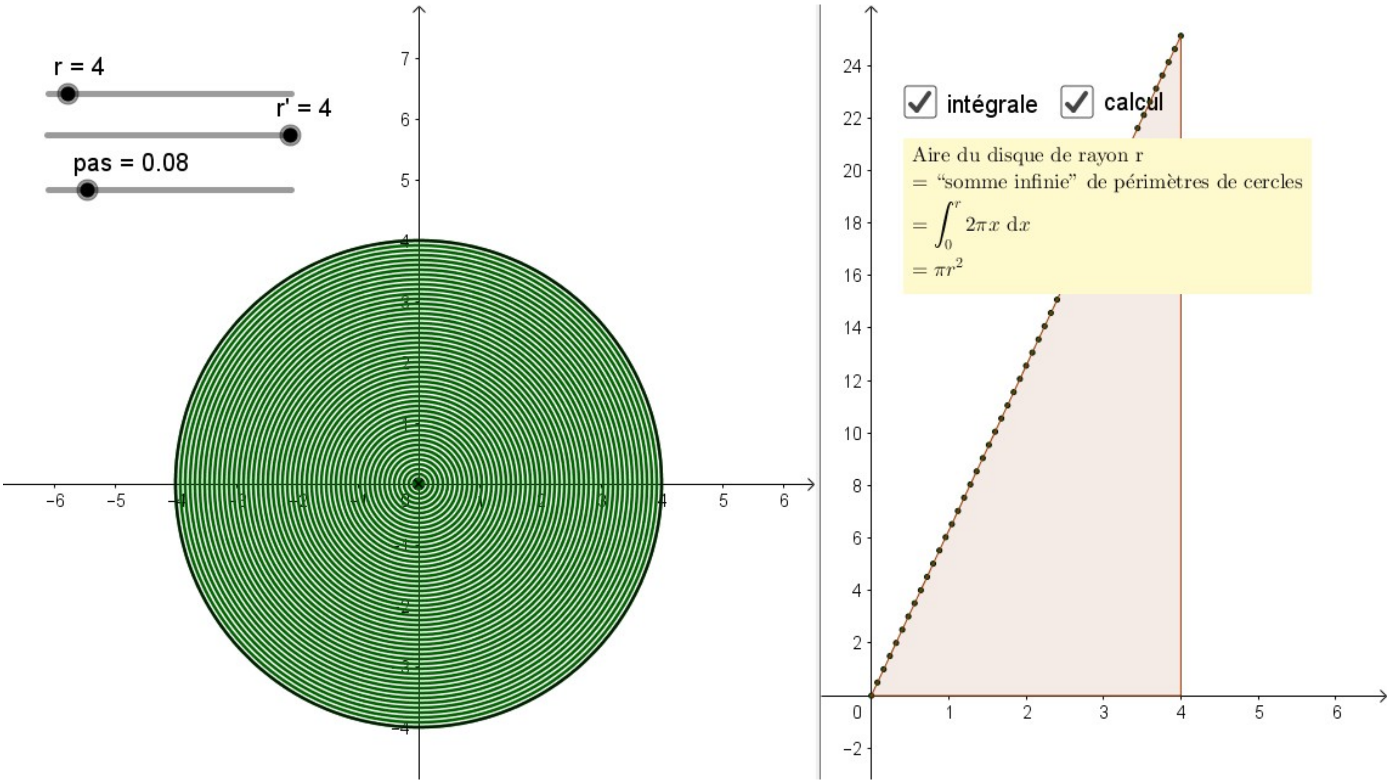
Or la dérivée de $\frac{4}{3}\pi r^3$ est $4\pi r^2$.

Y aurait-il un lien ?!

… OUI !!!

• L'aire d'un disque de rayon r est la « somme infinie » de périmètres de cercles de rayon x, avec x entre 0 et r. Autrement dit, il s'agit de l'intégrale $\int_0^r 2\pi x \, \mathrm{d}x$. Ce qui donne πr^2.

Autrement dit, il est normal que la dérivée de l'aire du disque donne le périmètre d'un cercle.

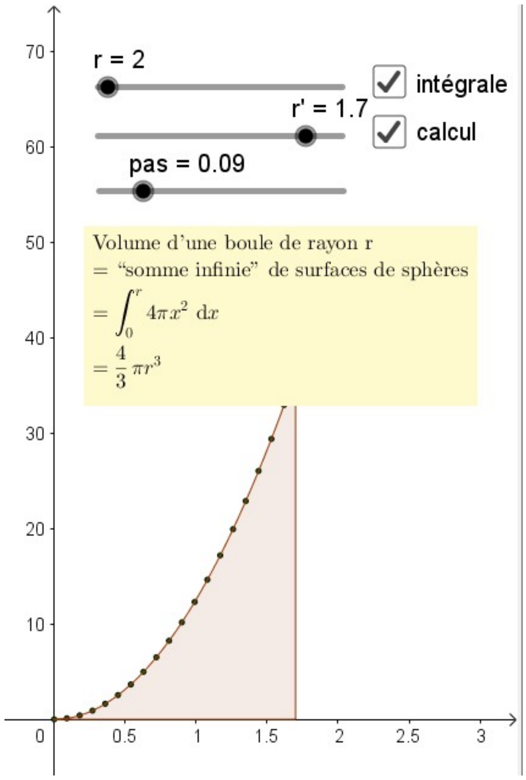


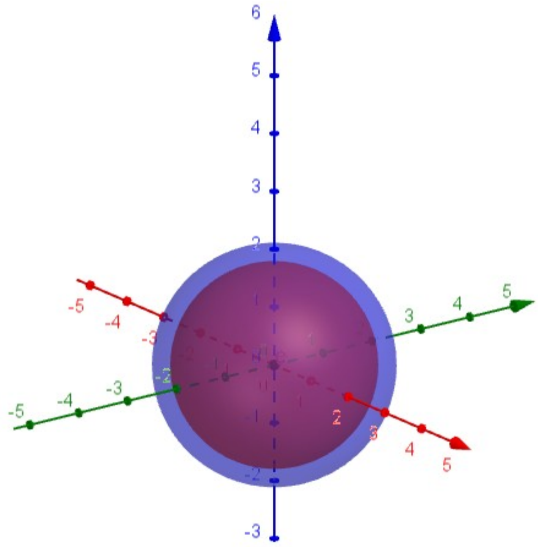
• De la même manière, le volume d'une boule de rayon r est égal à la « somme infinie » de surfaces de sphères de rayon x, avec x entre 0 et r.

Si on sait que la surface d'une sphère de rayon x est $4\pi x^2$, alors le volume de la boule est $\int_0^r 4\pi x^2 \mathrm{d}x$, ce qui donne $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Et si on ne connaît pas la surface d'une sphère de rayon x , on peut démontrer d'une autre façon* que le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi r^3$, et donc on a : $\frac{4}{3}\pi r^3 = \int_0^r \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{S}(x)$ est la surface d'une sphère de rayon x . D'après le cours, $\mathrm{S}(x)$ est donc la primitive de $\frac{4}{3}\pi r^3$ qui s'annule en 0, c'est donc $4\pi r^2$.

Autrement dit, il est normal que la dérivée du volume d'une boule donne la surface d'une sphère.





* par exemple en considérant que le volume de la boule est égal à 2 fois celui d'une demi-boule, engendrée par la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, et alors le volume de la boule est :

$$2\int_0^r \pi(f(x))^2 \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3 .$$