T°ES/LSPÉ	SÉANCE DU MARDI 19 MAI 2020

I. Un téléphone qui dure… LOL !

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone qu'il vient de s'offrir de type T_1.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois. On admet que cette variable aléatoire suit la loi normale d'espérance $\mu=48$ et d'écart-type $\sigma=10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans est d'environ 0,885.

2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

Correction :

1. 3 ans = 36 mois. D'après la calculatrice (modèle CASIO, menu STAT puis DIST-NORM-Ncd) :

$p(X\geqslant 36)\approx p(36\leqslant X\leqslant 10^{99})\approx 0{,}885$

La probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans est d'environ 0,885.

2. 5 ans = 60 mois. On cherche une probabilité conditionnelle :

$$p_{X\geqslant 36}(X\leqslant 60)=\frac{p(X\geqslant 36\cap X\leqslant 60)}{p(X\geqslant 36)}=\frac{p(36\leqslant X\leqslant 60)}{p(X\geqslant 36)}\approx\frac{0{,}7699}{0{,}885}\approx 0{,}86994$$

Donc la probabilité que le téléphone de type T_1 fonctionne moins de 5 ans sachant qu'il a déjà fonctionné plus de 3 ans est d'environ 0,870.

II. Un exercice bateau

Des bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes. Les batteries sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$.

Déterminer la durée d'utilisation par jour, en minutes, de chaque bateau afin que seuls 1 % des bateaux soient déchargés avant la fin de la journée.

Correction : On cherche l'entier a tel que $p(X<a)\approx 0{,}01$.

D'après la calculatrice (modèle CASIO, menu STAT puis DIST-NORM-invN) : $a\approx 476{,}74$.

Afin que seuls 1 % des bateaux soient déchargés avant la fin de la journée (en termes probabilistes bien sûr), la durée d'utilisation par jour ne doit pas excéder 477 minutes.

III. Marathon

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.

Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près.

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.

Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.

3. **a)** Calculer $P(T \leqslant 300)$.

b) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant $P(T \geqslant t) = 0,9$.

c) Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

Correction :

1. A l'aide de la calculatrice on trouve :
$P(210 \leqslant T \leqslant 270) \approx \mathbf{0,543}$

2. On veut calculer :
$$P_{(210 \leqslant T \leqslant 270)}(T \leqslant 240) = \frac{P(210 \leqslant T \leqslant 240)}{P(210 \leqslant T \leqslant 270)} \approx \frac{0{,}246}{0{,}543}$$
$$\approx \mathbf{0,453}$$
En effet $(210 \leqslant T \leqslant 270) \cap (T \leqslant 240) = (210 \leqslant T \leqslant 240)$.

3. **a.** $P(T \leqslant 300) = 0,5 + P(250 \leqslant T \leqslant 300) \approx \mathbf{0,9}$.

b. $P(T \geqslant t) = 0,9 \Leftrightarrow P(T \leqslant t) = 0,1$
A l'aide de la fonction *Inverse loi normale* de la calculatrice on trouve $t \approx 200$

c. Cela signifie donc que 90% des marathoniens ont couru le marathon en plus de 200 minutes.

3. a. On pouvait aussi faire : $P(T \leqslant 300) \approx P(-10^{99} \leqslant T \leqslant 300)$ et obtenir 0,9 à la calculatrice (avec Ncd).
3. b. Autre méthode, avec le menu STAT-DIST-Norm-InvN (CASIO), en choisissant *Tail : Right* et *Area :0,9* on obtient aussi $t \approx 200$.
3. c. En fait, c'est très mal formulé cette correction ! Il vaudrait mieux dire : la probabilité qu'un marathonien ait couru le marathon en plus de 200 minutes est de 90 % environ.

IV. Une erreur souvent commise dans les exercices et corrigés

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on peut vouloir trouver une approximation de $\mathrm{p}(X \leqslant 45)$ à l'aide du théorème de Moivre-Laplace.
La plupart des corrigés sur internet ou dans les manuels scolaires proposent alors d'appliquer le théorème de Moivre-Laplace, en approchant la loi binomiale par la loi normale Z correspondante, c'est-à-dire en remplaçant $\mathrm{p}(X \leqslant 45)$ par $\mathrm{p}(Z \leqslant 45)$.

1. Pourquoi cela n'est finalement pas très judicieux ?

2. Déterminer les paramètres de la loi normale Z qui approche X si n est grand.

3. Prenons $n=255$ et $p=0{,}02$ (situation pas vraiment rare).

a) Calculer $\mathrm{p}(X \leqslant 5)$ en utilisant la loi binomiale.

b) Calculer $\mathrm{p}(Z \leqslant 5)$ et $\mathrm{p}(0 \leqslant Z \leqslant 5)$.

c) Qu'observe-t-on ?

Remarque : on peut démontrer que l'erreur commise en négligeant $\mathrm{p}(Z<0)$ est inférieure à 0,0127.
[voir sur mon site si ça vous intéresse]

Pour me prouver que vous avez fait cette séance, je vous demande de m'envoyer une photo ou un scan de votre travail (écrit à la main) sur mon mail (mathemathieu@free.fr), avant le mercredi 20 mai 23h59. Je vous répondrai dans les 48h pour confirmer la réception de votre travail.

Correction :

1. Cela n'est pas très judicieux d'approcher $\mathrm{p}(X \leqslant 45)$ par $\mathrm{p}(Z \leqslant 45)$ car X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, donc calculer $\mathrm{p}(X \leqslant 45)$ signifie bien sûr $\mathrm{p}(0 \leqslant X \leqslant 45)$: on devrait approcher $\mathrm{p}(X \leqslant 45)$ par $\mathrm{p}(0 \leqslant Z \leqslant 45)$.

2. Si n est grand, on approche X par Z avec $Z \sim \mathcal{N}\left(np \,;\, \sqrt{np(1-p)}^2\right)$.

3. Avec $n=255$ et $p=0{,}02$: $np=5{,}1$ et $\sqrt{np(1-p)} \approx 2{,}2356$.

a) On peut utiliser directement la calculatrice (sur CASIO : menu STAT, puis DIST-BINM-Bcd) et trouver : $\mathrm{p}(X \leqslant 5) \approx 0{,}59825$.
On peut aussi revenir à la définition de la loi binomiale et écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{p}(X \leqslant 5) &= \sum_{k=0}^{5} \binom{255}{k} 0{,}02^k\, 0{,}98^{255-k} \\ &= \binom{255}{0} 0{,}98^{255} + \binom{255}{1} 0{,}02 \times 0{,}98^{254} + \binom{255}{2} 0{,}02^2\, 0{,}98^{253} + \binom{255}{3} 0{,}02^3\, 0{,}98^{252} + \binom{255}{4} 0{,}02^4\, 0{,}98^{251} + \binom{255}{5} 0{,}02^5\, 0{,}98^{250} \\ &\approx 0{,}59825.\end{aligned}$$

b) Avec la calculatrice (sur CASIO : menu STAT, puis DIST-NORM-Ncd) :
$\mathrm{p}(Z \leqslant 5) \approx \mathrm{p}(-10^{99} \leqslant Z \leqslant 5) \approx 0{,}48216$ et $\mathrm{p}(0 \leqslant Z \leqslant 5) \approx 0{,}47089$.

c) Observation 1 : remplacer X par Z n'est déjà pas un bon choix… On obtient $\approx 0{,}471$ au lieu de $\approx 0{,}598$!
Tout d'abord, n n'est peut-être pas assez grand pour le p choisi… Le théorème de Moivre-Laplace parle de limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Mais on pourrait corriger tout cela avec ce qu'on appelle la « correction de continuité ».
Observation 2 : l'écart entre $\mathrm{p}(Z \leqslant 5)$ et $\mathrm{p}(0 \leqslant Z \leqslant 5)$ est d'environ $0{,}01127$, soit 1,1 % environ…
Ce n'est pas négligeable !