T°ES/LSPÉ	SÉANCE DU MARDI 12 MAI 2020

I. Ça pique ! 1

II. Mené à la baguette 1

III. La correction de continuité 2

I. Ça pique !

Dans cet exercice, interdiction d'utiliser sa calculatrice.

L'entreprise SAPIQ commercialise des pots de moutarde de 800 g.
Un pot est déclaré « conforme » s'il contient entre 790 g et 810 g de moutarde.

L'entreprise SAPIQ reçoit un agent commercial vantant les mérites d'une nouvelle machine. La masse de moutarde contenue dans un pot produit par cette nouvelle machine est modélisée par une variable aléatoire X. On admet que X suit une loi normale de moyenne 800 et d'écart type 6.

1. Calculer la probabilité arrondie au millième, qu'un pot produit par la nouvelle machine soit conforme.
On pourra utiliser le résultat suivant : $p(X \in [800;810]) \approx 0{,}452$.

2. L'agent commercial avance l'argument suivant : « X suit une loi normale de moyenne 800 et d'écart type 6. Cela signifie que tous les pots produits par notre machine contiennent entre 794 g et 806 g de moutarde ; ils sont donc tous conformes. » L'argument de l'agent commercial est-il exact ? Justifier.

Correction :

1. On cherche $p(790 \leqslant X \leqslant 810)$: $p(790 \leqslant X \leqslant 810) = p(790 \leqslant X \leqslant \mathbf{800}) + p(\mathbf{800} \leqslant X \leqslant 810)$
Or, la courbe représentative de la loi normale $\mathcal{N}(800;6^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=800$ donc $p(790 \leqslant X \leqslant \mathbf{800}) = p(\mathbf{800} \leqslant X \leqslant 810)$ et alors :

$$p(790 \leqslant X \leqslant 810) = 2 \times p(800 \leqslant X \leqslant 810) \approx 2 \times 0{,}452 \approx 0{,}904 .$$

La probabilité qu'un pot produit par la nouvelle machine soit conforme est d'environ 0,904.

2. On cherche $p(794 \leqslant X \leqslant 806)$: $p(794 \leqslant X \leqslant 806) = p(800-6 \leqslant X \leqslant 800+6)$
autrement dit $p(794 \leqslant X \leqslant 806) = p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ où $\mu = 800$ et $\sigma = 6$
et donc, d'après le cours : $p(794 \leqslant X \leqslant 806) \approx 0{,}68$.
L'argument de l'agent commercial est donc faux.

II. Mené à la baguette

Un boulanger fabrique des baguettes dont la taille T, en gramme, suit une loi normale d'espérance 200.

Il affirme que 95 % de ses baguettes font entre 190 et 210 grammes.

1. Déterminer, sans calculatrice, une valeur approchée de l'écart-type σ.

2. Déterminer, sans calculatrice, la probabilité d'avoir une baguette qui pèse moins de 190 g.

3. Quelle est la probabilité d'avoir deux jours d'affilée une baguette qui pèse moins de 190 g ?

Correction : vidéo (≈ 9 min) ou image

III. La correction de continuité

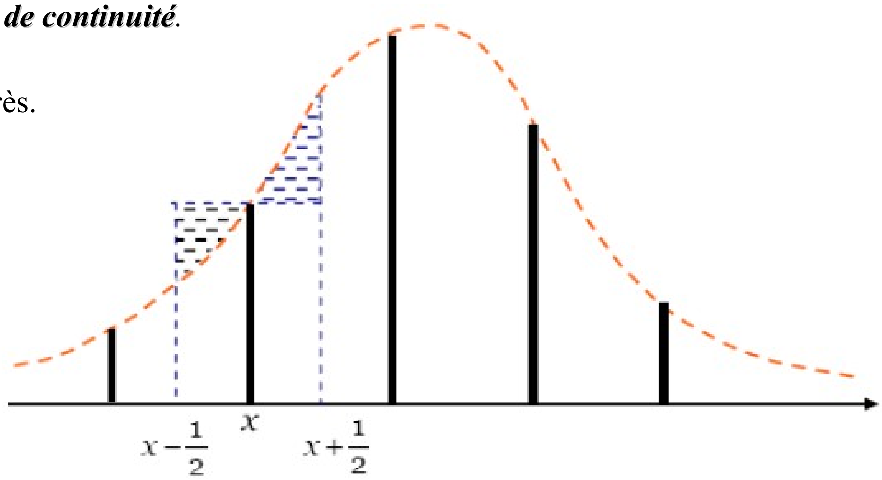
Partie 1 : calculer une valeur isolée qu'on ne peut calculer

Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale d'espérance 70 et d'écart-type 8,07.

1. Quelle est la valeur de $p(Z=60)$?

2. Si on souhaite avoir une valeur plus cohérente de la probabilité d'obtenir 60, on peut remplacer la probabilité $p(Z=60)$ par celle d'un intervalle d'amplitude 1 autour de 60 : $p(59{,}5 \leqslant Z \leqslant 60{,}5)$.
Cette opération s'appelle ***la correction de continuité***.

Calculer $p(59{,}5 \leqslant Z \leqslant 60{,}5)$ à 10^{-6} près.



Partie 2 : valider la correction de continuité

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ et que n est suffisamment grand, on peut approcher X par la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ où $\mu = np$ (c'est espérance de X) et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ (c'est l'écart-type de X).

Afin de vérifier si la correction de continuité donne de bons résultats, testons-la sur des exemples.

Soit X une v.a.r. qui suit une loi binomiale de paramètres 255 et 0,02, et Z la loi normale correspondante.

1. Déterminer les paramètres de la loi Z.

2. a) Calculer $p(X=4)$.

b) Calculer $p(3{,}5 \leqslant Z \leqslant 4{,}5)$.

3. a) Calculer $p(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

b) Calculer $p(4 \leqslant Z \leqslant 8)$ et $p(3{,}5 \leqslant Z \leqslant 8{,}5)$. Comparer.

Partie 3 : un test encore plus probant

On lance 50 fois une pièce équilibrée. On note X la v.a.r. comptant le nombre de piles obtenus.

1. X suit quelle loi de probabilité ?

2. Calculer $p(24 \leqslant X \leqslant 26)$.

3. a) En utilisant une loi normale, approcher $p(24 \leqslant X \leqslant 26)$.

b) En utilisant la loi normale corrigée par continuité, approcher $p(24 \leqslant X \leqslant 26)$.

Correction :

Partie 1 : calculer une valeur isolée qu'on ne peut calculer

1. $p(Z=60) = 0$ car X est une loi à densité.

2. $p(59{,}5 \leqslant Z \leqslant 60{,}5) \approx 0{,}004328$.

Partie 2 : valider la correction de continuité

1. Espérance de Z : $255 \times 0{,}02 = 5{,}1$. Écart-type de Z : $\sqrt{255 \times 0{,}02 \times (1-0{,}02)} = \sqrt{4{,}998}$.
Donc $Z \sim \mathcal{N}(5{,}1 ; \sqrt{4{,}998}^2)$.

2. a) $p(X=4) \approx 0{,}1728$.

b) $p(3{,}5 \leqslant Z \leqslant 4{,}5) \approx 0{,}1571$.

3. a) $p(4 \leqslant X \leqslant 8) \approx 0{,}678797$.

b) $p(4 \leqslant Z \leqslant 8) \approx 0{,}59136$ et $p(3{,}5 \leqslant Z \leqslant 8{,}5) \approx 0{,}69875$. C'est bien mieux avec continuité.

Partie 3 : un test encore plus probant

1. $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0{,}5)$.

2. $p(24 \leqslant X \leqslant 26) = p(X=24) + p(X=25) + p(X=26) \approx 0{,}3282$.

3. a) $p(24 \leqslant X \leqslant 26) \approx p(24 \leqslant Z \leqslant 26) \approx 0{,}223$ (horrible !) où $Z \sim \mathcal{N}(25 ; 3{,}5355)$.

b) $p(24 \leqslant X \leqslant 26) \approx p(23{,}5 \leqslant Z \leqslant 26{,}5) \approx 0{,}3286$ où $Z \sim \mathcal{N}(25 ; 3{,}5355)$.