T°S | SÉANCE DU MARDI 12 MAI 2020

I. 45 page 417 : durée de vie d'une ampoule 1

II. 65 page 423 : réglages industriels d'une machine 1

III. Amérique du Sud, novembre 2019 (extrait) 3

I. 45 page 417 : durée de vie d'une ampoule

Correction :

X : variable aléatoire qui à toute ampoule de ce type choisie au hasard associe sa durée de vie en heures. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$.

1. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 5\,000$.

2. $P(X \geqslant 6\,000) = 1 - P(X \leqslant 6\,000)$

$$= 1 - \int_0^{6\,000} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{6\,000} = e^{-1,2} \approx 0{,}3012.$$

← on répète 4 fois (de façon identique et indépendante) une épreuve de Bernoulli de succès « l'ampoule éclaire encore au bout de 6 000 heures », de probabilité de succès $e^{-1,2}$. Donc L suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=e^{-1,2}$.

3. Une variable aléatoire L est implicitement définie : variable aléatoire qui à tout lot de 4 ampoules neuves de ce type branchées au même instant sur un lustre, associe le nombre d'ampoules qui éclairent encore au bout de 6 000 heures.

a. $P(L=4) = \dbinom{4}{4} \times p^4 \times (1-p)^{4-4} = p^4 = e^{-4,8} \approx 0{,}008.$

b. $P(L=1) = \dbinom{4}{1} \times p^1 \times (1-p)^{4-1} = 4 \times e^{-1,2} \times (1-e^{-1,2})^3 \approx 0{,}41.$

II. 65 page 423 : réglages industriels d'une machine

Correction : ***Partie A***

a) Aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction densité, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$: environ 0,75 ou 0,80 unités d'aire.

b) La densité de la loi exponentielle est $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, donc cette densité vérifie $f(0)=\lambda$.
On lit donc λ sur le graphique, c'est l'image de 0 par f : $\boldsymbol{\lambda=1{,}5}$.

Partie B

a) $p(X\leqslant 1)=\int_0^1 1{,}5\,e^{-1,5t}\,dt=[-e^{-1,5t}]_0^1=\ldots=1-e^{-1,5}$.

Valeur approchée à 10^{-3} par excès : **0,777**.

b) $p(X>2)=1-p(X\leqslant 2)=1-\int_0^2 1{,}5\,e^{-1,5t}\,dt=\ldots\ =e^{-3}$

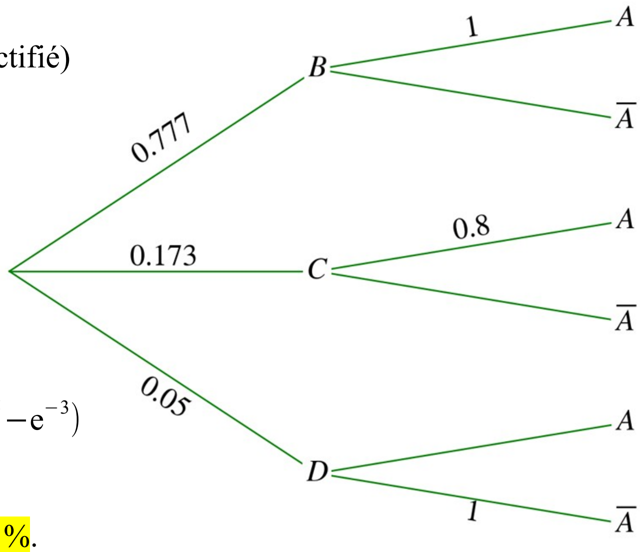
c) $p(1 \leqslant X \leqslant 2) = 1 - (p(X<1) + p(X>2))$
$= 1 - (p(X \leqslant 1) + p(X>2))$
$= 1 - (1 - e^{-1,5} + e^{-3}) \ = e^{-1,5} - e^{-3}$ $\approx 0,173$

d) Par définition, la limite de $F(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est l'espérance de X, donc elle est égale à $\frac{1}{\lambda}$, soit $\frac{1}{1,5}$ ou encore $\mathbf{\frac{2}{3}}$.

Partie C

1. a) On note les événements suivants :

B : l'écart est inférieur à 1 (donc il est accepté)
C : l'écart est compris entre 1 et 2 (donc il est rectifié)
D : l'écart est supérieur à 2 (donc il est refusé)
A : le cylindre est accepté.



D'après la partie B : $p(B) = 1 - e^{-1,5} \approx 0,777$
$p(C) = e^{-1,5} - e^{-3} \approx 0,173$
$p(D) = e^{-3} \approx 0,05$

<u>*Remarque*</u> : $p(B) + p(C) + p(D) = 1$.

$p(A) = p(B) + 0,8\,p(C)$ (énoncé)
$= p(X<1) + 0,8\,p(1 \leqslant X \leqslant 2) = 1 - e^{-1,5} + 0,8 \times (e^{-1,5} - e^{-3})$
$= 1 - 0,2\,e^{-1,5} - 0,8\,e^{-3}$
$\approx 0,915$

Donc la probabilité qu'il soit accepté est d'environ 91,5 %.

b) $p_A(C) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(A)} = \dfrac{p(C) \times p_C(A)}{p(A)} = \dfrac{(e^{-1,5} - e^{-3}) \times 0,8}{1 - 0,2\,e^{-1,5} - 0,8\,e^{-3}} \approx 0,151$

Donc, sachant qu'il est accepté, la probabilité qu'il ait subi une rectification est d'environ 15,1 %.

2. a) On appelle Z la variable aléatoire qui à tout lot de 10 cylindres prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cylindres acceptés.
L'épreuve de Bernoulli « prélever 1 cylindre au hasard, regarder s'il est accepté » est répété 10 fois, de façon identique et indépendante. Par conséquent, Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = p(A)$ c'est-à-dire $p \approx 0,915$.

Donc : $p(Z=10) = \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0 = p^{10} \approx 0,411$.

La probabilité que les dix cylindres soient acceptés est d'environ 41,1 %.

b) « Au moins un cylindre est refusé » est équivalent à « au maximum, 9 cylindres sont acceptés ».
$p(Z \leqslant 9) = 1 - p(Z>9) = 1 - p(Z=10) = 1 - p^{10} \approx 0,589$

Donc la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé est d'environ 58,9 %.

III. Amérique du Sud, novembre 2019 (extrait)

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Le roller de vitesse est un sport qui consiste à parcourir une certaine distance le plus rapidement possible en rollers. Dans le but de faire des économies, un club de roller de vitesse s'intéresse à la gestion de ses chronomètres et des roulements de ses rollers.

Partie A :
On note T la variable aléatoire égale à la durée de vie, en mois, d'un chronomètre et on admet qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0555$.

1. Calculer la durée de vie moyenne d'un chronomètre (arrondie à l'unité).
2. Calculer la probabilité qu'un chronomètre ait une durée de vie comprise entre un et deux ans.
3. Un entraîneur n'a pas changé son chronomètre depuis deux ans. Quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de fonctionner au moins un an de plus?

Correction :

1. On a $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 18$.
   La durée de vie moyenne d'un chronomètre est d'environ 18 mois.

2. On veut calculer :
   $P(12 \leqslant T \leqslant 24) = \mathrm{e}^{-12\times\lambda} - \mathrm{e}^{-24\times\lambda} \approx 0,250$.
   La probabilité qu'un chronomètre ait une durée de vie comprise entre un et deux ans est environ égale à $0,250$.

3. On veut calculer :
$$\begin{aligned} P_{T\geqslant 24}(T \geqslant 36) &= P_{T\geqslant 24}(T \geqslant 24+12) \\ &= P(T \geqslant 12) \qquad (*) \\ &= \mathrm{e}^{-12\lambda} \\ &\approx 0,514 \end{aligned}$$
   $(*)$ car la loi exponentielle est à durée de vie sans vieillissement.
   Sachant que l'entraîneur n'a pas changé son chronomètre depuis deux ans, la probabilité qu'il soit encore en état de fonctionner au moins un an de plus est environ égale à $0,514$.

À dire : une primitive de $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est $-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $\mathrm{P}(12 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 24) = \int_{12}^{24} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-\lambda t}]_{12}^{24} = \ldots$