T°S	SÉANCE DU MARDI 5 MAI 2020

Aujourd'hui, seulement deux exercices, alors faites-les sérieusement, surtout le deuxième (exo Bac).

I. Exercice 90 p.273 : accélération uniforme = parabole ?!

Un mobile M se trouve sur un axe. Son abscisse, sa vitesse et son accélération sont données en fonction du temps t, soit respectivement par trois fonctions x, v et γ (« gamme »).
On dit qu'un mouvement est uniformément accéléré si la fonction accélération est constante.
Montrer que si le mouvement d'un mobile sur un axe est uniformément accéléré, d'accélération a, alors il existe deux constantes b et c telles que la fonction position soit donnée par $x(t)=\frac{1}{2}at^2+bt+c$.

Autrement dit, nous allons montrer que **tout mouvement uniformément accéléré suit une parabole !**

Correction :
On rappelle que la vitesse instantanée est $x'(t)$ et l'accélération $x''(t)$.
Autrement dit, avec les notations de l'exercice : $v=x'$ et $\gamma=v'$.
On suppose que l'accélération est constante donc $\gamma(t)=a$ où $a \in \mathbb{R}$ *ie* $v'(t)=a$.
Donc $v(t)=at+b$ où $b \in \mathbb{R}$ *ie* $x'(t)=at+b$.
D'où $x(t)=a\times\frac{1}{2}t^2+bt+c$ où $c \in \mathbb{R}$.

II. Polynésie, juin 2019

On considère la suite (I_n) définie par $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I_0=\ln(2)$.

2. **a.** Calculer I_0-I_1.

b. En déduire I_1.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n-I_{n+1}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.

4. Soit n un entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0\leqslant\dfrac{x^n}{1-x}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.

b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

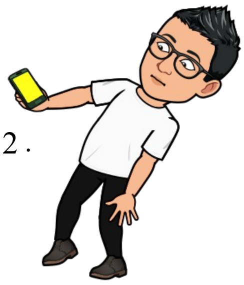
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.

b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque : on vient donc de démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \ln 2$.



Correction : télécharger en cliquant ici