T°S | SÉANCE DU LUNDI 4 MAI 2020

I. Modèle exponentiel de Malthus

Notre objectif ici est de ***modéliser une population p*** qui dépend du temps de manière déterministe, c'est-à-dire avec une loi parfaitement définie.
On va considérer que le temps est continu : $t \in \mathbb{R}$. Et on a une fonction $p(t)$, à valeurs réelles.
À chaque instant *t*, l'évolution de cette population est donnée par la vitesse d'accroissement (ce que l'on appelle le *taux de variation instantané* de l'effectif de la population) c'est-à-dire par le nombre dérivé $p'(t)$.

• La ***vitesse moyenne*** entre t_1 et t_2 est $\dfrac{p(t_2)-p(t_1)}{t_2-t_1}$.

• La ***vitesse instantanée***, c'est la limite de la vitesse moyenne lorsque t_1 et t_2 sont très proches.
Donc c'est $\lim\limits_{t_1 \to t_2} \dfrac{p(t_2)-p(t_1)}{t_2-t_1}$, c'est-à-dire $p'(t)$.

On postule que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population, autrement dit : ***l'accroissement de p est proportionnel à p***. Ceci traduit l'idée que « plus il y a de lapins, plus ils font des petits ». En notant *k* le coefficient de proportionnalité, on veut donc trouver *p* tel que : $p'(t)=k\,p(t)$.

Cela s'appelle une ***équation différentielle***. On l'écrit en général $p'=k\,p$, mais attention : ici *k* est un nombre alors que *p* est une fonction « population » qui varie en fonction d'une variable *t* (le temps).

Résoudre l'équation différentielle $y'=a\,y$ c'est déterminer toutes les fonctions définies sur un intervalle *I* telles que pour tout réel *x* de *I* : $f'(x)=a\,f(x)$.

On note (E) l'équation différentielle $y'=a\,y$.

1. Vérifier que les fonctions $y(x)=C\,\mathrm{e}^{ax}$ sont bien des solutions de (E).
Cela prouve l'existence de solutions.

2. Montrons que ces fonctions sont les seules solutions de (E).
On note y une solution quelconque de (E).
Remarque : on peut écrire cela car on a prouvé l'existence de solutions au 1.
On définit alors la fonction z par $z(x)=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
a) Montrer que $z'(x)=0$ et en déduire que $z(x)=C$ où $C \in \mathbb{R}$.
b) En déduire que $y(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ et conclure : « Les solutions de l'équation différentielle $y'=a\,y$ sont les fonctions du type : … . »

<u>Correction</u> :

1. Si $y(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ alors : $y'(x)=\mathrm{C}\times a\,\mathrm{e}^{ax}=a\times\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}=a\,y(x)$, donc ***y* est solution de (E)**.

2. a) $z(x)=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$ donc, avec la formule de la dérivée d'un produit $(uv)'=u'v+uv'$, on obtient :
$z'(x)=y'(x)\mathrm{e}^{-ax}+y(x)\times(-a)\mathrm{e}^{-ax}$
Or $y'(x)=a\,y(x)$ donc : $z'(x)=a\,y(x)\mathrm{e}^{-ax}-a\,y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
donc $\boldsymbol{z'(x)=0}$.
Donc il existe une constante réelle C telle que $z(x)=\mathrm{C}$.

b) On a : $z(x)=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
donc $\mathrm{C}=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
donc $\mathrm{C}=\dfrac{y(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$
donc $\boldsymbol{\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}=y(x)}$.

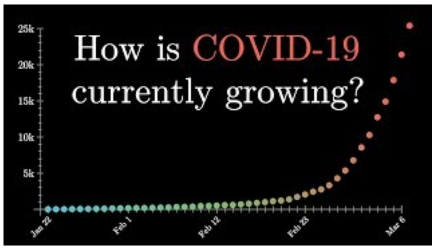
« Les solutions de l'équation différentielle $y'=a\,y$ sont les fonctions du type :
$y(x)=C\,\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante réelle. »

COMPLÉMENTS

Le modèle ici étudié est ce qu'on appelle le **modèle de Malthus**.

Bien sûr, en dynamique des populations il existe bien d'autres modèles que le modèle de Malthus (utilisé pour la datation au carbone 14), qui s'adapte en général au début des évolutions. La loi logistique (modèle de Verhulst) est très souvent utilisé (population de levures ; estimer la durée de conservation des aliments en microbiologie prévisionnelle ; analyse de l'état d'avancement de la diffusion d'une innovation durant son cycle de vie comme pour les chemins de fer, les ampoules à incandescence, l'électrification, la Ford modèle T, le transport aérien et les ordinateurs ; etc.).

Je vous conseille fortement de regarder cette vidéo qui analyse (début mars) les données sur le Covid-19 et sa croissance exponentielle, et parle ensuite de la loi logistique (c'est en anglais mais les sous-titres français sont très bons) : <u>https://youtu.be/Kas0tIxDvrg</u>
≈ 9 min



Malthus est aussi connu que mal connu. On lui prête souvent des idées extrêmes dont l'idée qu'il faut limiter la croissance de la population (par la force), sinon il est inévitable d'avoir des catastrophes démographiques, et de ne plus aider les pauvres financièrement… **Je suis horrifié de tous ces gens qui parlent de Malthus sans l'avoir lu** (vidéos YouTube de prof d'histoire, etc.).
Malthus préconise en effet une régulation volontaire des naissances, la « contrainte morale » : les couples prévoyants, en retardant l'âge du mariage et en pratiquant la chasteté jusqu'au mariage, seraient enclins à n'avoir que le nombre d'enfants qu'ils sont certains de pouvoir entretenir.
Il prône aussi l'arrêt de certaines aides aux nécessiteux, en opposition aux propositions de Godwin qui souhaite généraliser l'assistance aux pauvres, mais explique clairement sa théorie, il veut aider les pauvres.
Marx et Engels (grand ami de Marx) critiqueront violemment les propos de Malthus, mais tout ça est bien plus nuancé qu'il n'y paraît !
J'espère vous inciter fortement à ne jamais accorder trop d'importance à des résumés sur les écrits/pensées des autres. Mieux vaut lire les écrits publiés pour en juger, plutôt que de lire un résumé nécessairement subjectif (même dans les livres d'histoire).
Si tout cela vous intéresse (qu'ont dit Marx et Engels, etc.), si vous allez faire de la biologie l'année prochaine, si vous êtes simplement curieux… je vous conseille d'aller faire un tour dans <u>mon document de 27 pages sur le sujet</u> : il y a des maths, de la philosophie, de la biologie, des exemples, des éléphants, de la littérature, etc. Fouillez, ne lisez pas tout si vous voulez… Bref soyez curieux et faites le tri ^_^

II. Modèle de Verhulst

Hé oui, toutes les activités que je donne et les liens que je vous incite à regarder peuvent tomber un jour au Bac… Voici un extrait du Bac de Polynésie septembre 2019 :

> Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.
>
> **Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution**

→ *voir ici si ça vous intéresse (suite et fonction) : je l'enlève car ce n'est pas le but de cette séance*

> **Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution**
>
> Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.
> Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $P(t)=\dfrac{1\,000}{0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).
>
> **1.** Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
>
> **2.** Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
>
> **3.** Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ telle que $P(t_0)=2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
>
> **4.** Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Éléments de correction :

1. La fonction P est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$.
Pour tout réel t de $[0;+\infty[$ on a :

$$P'(t)=-\frac{1\,000\times(-0,5)\times 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}{(0,4+3,6\mathrm{e}^{-0,5t})^2}=\frac{1\,800\mathrm{e}^{-0,5t}}{(0,4+3,6\mathrm{e}^{-0,5t})^2}.$$

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, pour tout réel t positif on a $P'(t)>0$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} -0,5t=-\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T=0$
Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=2\,500$.
On obtient donc le tableau de variations suivant :

t	0	$+\infty$
$P'(t)$	$+$	
P	250 ↗	$2\,500$

3. La fonction P est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
De plus $P(0)=250<2\,000$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=2\,500>2\,000$.
D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $P(t)=2\,000$ possède une unique solution t_0 sur $[0;+\infty[$.
D'après la calculatrice on a $t_0\approx 7,2$.

4. Selon ce modèle la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles en 2026.

III. Exercice 55 page 262 : le retour de Malthus

Correction :
rappels :

PROPRIÉTÉ. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$.

Autrement dit, F *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$ *: c'est la primitive qui s'annule en* a.

PROPRIÉTÉ. Si F et G sont deux primitives de f, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I : $F(x)=G(x)+k$.

a) On cherche la primitive $N(t)$ de $-50e^{-0,1t}$ telle que $N(0)=500$.

Par propriétés du cours, les primitives de $-50e^{-0,1t}$ sont les fonctions : $\int_0^t -50e^{-0,1x}dx+k$, où $k \in \mathbb{R}$.

$N(0)=500$ donc $\int_0^0 -50e^{-0,1x}dx+k=500$ *ie* $k=500$ et $N(t)=\int_0^t -50e^{-0,1x}dx+500$.

Or, $-50e^{-0,1x}=-50\times\dfrac{1}{-0,1}\times(-0,1)e^{-0,1x}=500\times(-0,1)e^{-0,1x}$

donc $N(t)=[500e^{-0,1x}]_0^t+500=\ldots=500(e^{-0,1t}-1)+500=500e^{-0,1t}$.

b) $N(t)\leqslant 1 \Leftrightarrow 500e^{-0,1t}\leqslant 1 \Leftrightarrow e^{-0,1t}\leqslant\dfrac{1}{500} \Leftrightarrow -0,1t\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{500}\right) \Leftrightarrow -0,1t\leqslant -\ln 500 \Leftrightarrow t\geqslant\dfrac{-\ln 500}{-0,1}$

$\Leftrightarrow t\geqslant 10\ln 500$

Donc à partir de $t=10\ln 500$ (quelle unité ?!) soit t ≈ 62,15, la quantité du produit sera inférieure à 1.

Remarque : $\ln 500=\ln(5\times10\times10)=\ln(5\times2\times5\times2\times5)=\ln(2^2\times5^3)=\ln(2^2)+\ln(5^3)=2\ln 2+3\ln 5$