T°S	SÉANCE DU JEUDI 30 AVRIL 2020

I. Une primitive un peu moins simple

Déterminer une primitive de la fonction définie sur $[4;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$.

Aide : décomposer f en plusieurs fonctions plus simples.

Correction : On cherche à écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

En simplifiant, on aurait donc $f(x)=\dfrac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$ et donc, par identification (à faire) :

$$a=2\,,\ b=1\,,\ c=-2\,.$$

D'où : $f(x)=2x+1-\dfrac{2}{x-2}$.

$f(x)=2x+1-2\times\dfrac{1}{x-2}$ donc une primitive de f est : $\mathrm{F}(x)=x^2+x-2\ln(|x-2|)$.

Or $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ donc sur $[4;+\infty[$: $\mathrm{F}(x)=x^2+x-2\ln(x-2)$.

II. Exercice 28 p259 : la linéarité à la rescousse

Dans cet exercice, on va utiliser la linéarité de l'intégrale pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x$, qu'à priori on ne sait pas calculer…

Correction : **a)** $\mathrm{I}+\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=[x]_0^1=1$

b) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ donc une primitive de $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ est $\ln(|e^x+1|)$.

Or, $e^x+1>0$ donc une primitive est $\ln(e^x+1)$:

$\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x=[\ln(e^x+1)]_0^1=\ldots=\ln(e+1)-\ln 2$.

c) $\mathrm{I}+\mathrm{J}=1$ donc $\mathrm{I}=1-\mathrm{J}$: $\mathrm{I}=1-\ln(e+1)+\ln 2$.

$\longrightarrow$

III. Encadrer une intégrale

On ne sait pas (en Terminale S) calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Donc nous allons en trouver un encadrement.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $1-x^2 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1-x^2+x^4$.

2. En déduire que $\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{13}{15}$.

Correction : (non détaillée)

1. $1+x^2>0$ donc : $1-x^2 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1-x^2+x^4 \Leftrightarrow (1-x^2)(1+x^2) \leqslant 1 \leqslant (1-x^2+x^4)(1+x^2)$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1-x^4 \leqslant 1 \leqslant 1+x^6 \Leftrightarrow -x^4 \leqslant 0 \leqslant x^6$

Or ces inégalités sont vraies, car $x^4=(x^2)^2$ et $x^6=(x^3)^2$, d'où le résultat : $1-x^2 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1-x^2+x^4$.

2. $1-x^2 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1-x^2+x^4$ donc $\int_0^1 1-x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1-x^2+x^4\,\mathrm{d}x$

donc… (faire les calculs) $\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{13}{15}$.

Rappel : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Remarque culturelle : en réalité, une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est la fonction arctan (elle est sur votre calculatrice au-dessus de tan), qui est la fonction réciproque de la fonction tangente : $\tan(\arctan(x)) = x$ et vice-versa.

Donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(1) - \arctan(0)$. Mais quel nombre α vérifie $\tan \alpha = 1$? … $\frac{\pi}{4}$, oui très bien !

D'où $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. De même, $\arctan(0)=0$ d'où le résultat : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Magnifique… mais hors programme :'(

je parle à mon écran, je fais les questions réponses… je deviens dingue !