

Aujourd'hui, on va travailler sur le caractère primitif de votre cerveau... Ça va chauffer !



Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

• $k(x) = 3(3x+1)^4$ sur \mathbb{R}

• $l(x) = 16(4x-1)^3$ sur \mathbb{R}

• $m(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$ sur $]-\infty; -\frac{1}{4}[$

• $n(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

• $o(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ sur \mathbb{R}

• $p(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$ sur $]-\frac{3}{4}; +\infty[$

• $q(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$ sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$

• $r(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ sur $]-\infty; 0[$

• $s(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ sur $]2; 3[$

• $t(x) = \frac{5}{(2x+1)^3}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

• $u(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$

• $v(x) = \sqrt{e^{-3x}}$ sur \mathbb{R}

• $w(x) = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$ sur $]-2; +\infty[$

• $M(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur \mathbb{R}

• $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1; +\infty[$

• $z(x) = 3e^{-4x}$ sur \mathbb{R}

• $A(x) = \frac{1}{4}e^x$ sur \mathbb{R}

• $B(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $]-\infty; \frac{5}{3}[$

• $C(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur \mathbb{R}

• $D(x) = xe^{x^2}$ sur \mathbb{R}

• $E(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur \mathbb{R}

• $F(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1; 1[$

• $G(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1; +\infty[$

• $H(x) = e^{-2x+3}$ sur \mathbb{R}

• $I(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$

• $J(x) = xe^{-x^2}$ sur \mathbb{R}

• $K(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

• $L(x) = \frac{1}{4x}$ sur $]-\infty; 0[$

Correction : si f est une fonction, on notera ici f_p une de ses primitives.

• $k(x) = 3(3x+1)^4$ sur \mathbb{R}

k est de la forme $u'u^4$ donc $k_p = \frac{1}{5}u^5$:

$$k_p(x) = \frac{1}{5}(3x+1)^5$$

• $l(x) = 16(4x-1)^3$ sur \mathbb{R}

$$l(x) = 4 \times 4(4x-1)^3$$

donc l est de la forme $4u'u^3$

donc $l_p = 4 \times \frac{1}{4}u^4 = u^4$:

$$l_p(x) = (4x-1)^4$$

• $m(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$ sur $]-\infty; -\frac{1}{4}[$

m est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ donc $m_p = -\frac{1}{u}$:

$$m_p(x) = \frac{-1}{1+4x}$$

• $n(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$n(x) = 3 \times \frac{2}{(2x+1)^2}$$

→

donc n est de la forme $3\frac{u'}{u^2}$

donc $n_p = 3 \times \frac{-1}{u} = \frac{-3}{u}$:

$$n_p(x) = \frac{-3}{2x+1}$$

• $o(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ sur \mathbb{R}

o est de la forme $u'u^5$ donc $o_p = \frac{1}{6}u^6$:

$$o_p(x) = \frac{1}{6}(3x^2-2x+3)^6$$

• $p(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$ sur $]-\frac{3}{4}; +\infty[$

$$p(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{(4x+3)^2}$$

donc p est de la forme $\frac{1}{4} \times \frac{u'}{u^2}$

donc $p_p = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{-1}{4u}$:

$$p_p(x) = \frac{-1}{4(4x+3)} = \frac{-1}{16x+12}$$

• $q(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$ sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$

q ressemble presque à $\frac{u'}{u^2}$, on souhaiterait donc

avoir $\frac{-3}{(4-3x)^2}$. Faisons-le apparaître :

$$q(x) = \frac{2}{-3} \times \frac{-3}{(4-3x)^2}$$

donc $q = \frac{2}{-3} \times \frac{u'}{u^2}$ d'où $q_p = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{u}$

$$\text{donc } q_p(x) = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{4-3x} = \frac{2}{3(4-3x)} = \frac{2}{12-9x}$$

• $r(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ sur $]-\infty; 0[$

$$r(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$$

donc r est de la forme $-u'u^4$

donc $r_p = -\frac{1}{5}u^5$: $r_p(x) = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$

• $s(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ sur $]2; 3[$

$$s(x) = 2 \times \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}$$

donc s est de la forme $2\frac{u'}{u^2}$

donc $s_p = 2 \times \frac{-1}{u}$:

$$s_p(x) = 2 \times \frac{-1}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x^2-5x+6}$$

• $t(x) = \frac{5}{(2x+1)^3}$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$t(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^3}$$

donc t est de la forme $\frac{5}{2} \frac{u'}{u^3} = \frac{5}{2} u' u^{-3}$

donc $t_p = \frac{5}{2} \times \frac{1}{-2} u^{-2} = -\frac{5}{4u^2}$: $t_p(x) = -\frac{5}{4(2x+1)^2}$

• $u(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$$u(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

donc u est de la forme $v'v$

donc $u_p = \frac{1}{2}v^2 = \frac{v^2}{2}$:

$$u_p(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

• $v(x) = \sqrt{e^{-3x}}$ sur \mathbb{R}

$$v(x) = (e^{-3x})^{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{3} \times \frac{-3}{2} e^{-\frac{3}{2}x}$$

donc v est de la forme $\frac{-2}{3} u' e^u$

donc $v_p = \frac{-2}{3} e^u$: $v_p(x) = \frac{-2}{3} e^{-\frac{3}{2}x}$

• $w(x) = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$ sur $]-2; +\infty[$

$$w(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

donc w est de la forme $6\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $w_p = 6\sqrt{u}$: $w_p(x) = 6\sqrt{x+2}$

Rappel : la dérivée de \sqrt{u} c'est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- $M(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur \mathbb{R}

M est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

donc $M_p = 2\sqrt{u}$: $M_p(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$

- $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1; +\infty[$

$$y(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

donc y est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $y_p = \sqrt{u}$: $y_p(x) = \sqrt{x^2-1}$

- $z(x) = 3e^{-4x}$ sur \mathbb{R}

$$z(x) = \frac{3}{-4} \times (-4)e^{-4x}$$

donc z est de la forme $\frac{3}{-4}u'e^u$

donc $z_p = \frac{3}{-4}e^u$: $z_p(x) = -\frac{3}{4}e^{-4x}$

- $A(x) = \frac{1}{4}e^x$ sur \mathbb{R}

$$A_p(x) = A(x)$$

- $B(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $]-\infty; \frac{5}{3}[$

$$B(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5}$$

donc B est de la forme $\frac{1}{3} \frac{u'}{u}$

donc $B_p = \frac{1}{3} \ln(|u|)$:

$$B_p(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|)$$

or, sur $]-\infty; \frac{5}{3}[$, $3x-5 < 0$ (à démontrer)

donc $B_p(x) = \frac{1}{3} \ln(-3x+5)$

- $C(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur \mathbb{R}

$$C(x) = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

donc C est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$

donc $C_p = \frac{1}{2} \ln(|u|)$: $C_p(x) = \frac{1}{2} \ln(|x^2+2x+2|)$

or, $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ donc $x^2+2x+2 > 0$:

$$C_p(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2)$$

- $D(x) = xe^{x^2}$ sur \mathbb{R}

$$D(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$$

donc D est de la forme $\frac{1}{2}u'e^u$

donc $D_p = \frac{1}{2}e^u$: $D_p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

- $E(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur \mathbb{R}

E est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc $E_p = \ln(|u|)$:

$$E_p(x) = \ln(|e^x+1|) = \ln(e^x+1) \text{ (car } e^x+1 > 0 \text{)}$$

- $F(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1; 1[$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1}$$

donc F est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$

donc $F_p = \frac{1}{2} \ln(|u|)$:

$$F_p(x) = \frac{1}{2} \times \ln(|x^2-1|)$$

or $x^2-1 < 0$ sur $]-1; 1[$ (à démontrer)

donc $F_p(x) = \frac{1}{2} \times \ln(1-x^2)$

- $G(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1; +\infty[$

$$G(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

donc G est de la forme $\frac{u'}{u}$

donc $G_p = \ln(|u|)$: $G_p(x) = \ln(|\ln(x)|)$

or, $\ln(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ (à démontrer)

donc $G_p(x) = \ln(\ln(x))$

- $H(x) = e^{-2x+3}$ sur \mathbb{R}

$$H(x) = \frac{1}{-2} \times (-2)e^{-2x+3}$$

donc H est de la forme $\frac{1}{-2}u'e^u$

donc $H_p = \frac{1}{-2}e^u$: $H_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

- $I(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$ sur $] -\infty; 0[$

$$I_p(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ln(|x|)$$

or $|x| = -x$ sur $] -\infty; 0[$ donc

$$I_p(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \ln(-x)$$

- $J(x) = x e^{-x^2}$ sur \mathbb{R}

$$J(x) = \frac{1}{-2} \times (-2x) e^{-x^2}$$

donc J est de la forme $\frac{1}{-2} u' e^u$

donc $J_p = \frac{1}{-2} e^u$: $J_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

- $K(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sur $] 0; +\infty[$

$$K_p(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

- $L(x) = \frac{1}{4x}$ sur $] -\infty; 0[$

$$L(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{4x}$$

donc L est de la forme $\frac{1}{4} \frac{u'}{u}$

donc $L_p = \frac{1}{4} \ln(|u|)$: $L_p(x) = \frac{1}{4} \ln(|4x|)$

or $4x < 0$ sur $] -\infty; 0[$

donc $L_p(x) = \frac{1}{4} \ln(-4x)$