T°S	SÉANCE DU LUNDI 27 AVRIL 2020

I. Calculs de primitives

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

- $a(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
- $b(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$
- $c(x)=\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$
- $d(x)=1-x+x^2-x^3$ sur $\mathbb{R}$
- $\mathrm{e}(x)=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$
- $f(x)=2x+1$ sur $\mathbb{R}$
- $g(x)=10x^4+6x^3-1$ sur $\mathbb{R}$
- $h(x)=(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$
- $i(x)=-\frac{4}{3x^5}$ sur $]0+;\infty[$
- $j(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

Correction : si f est une fonction, on notera ici f_p une de ses primitives.

- $a(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

  $a_p(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+\ln(x)$

- $b(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

  $b_p(x)=\ln(|3x-4|)=\ln(3x-4)$

- $c(x)=\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

  $c(x)=-(-1\times\mathrm{e}^{-x})$ donc $c_p(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

- $d(x)=1-x+x^2-x^3$ sur $\mathbb{R}$

  $d_p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

- $\mathrm{e}(x)=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

  $\mathrm{e}_p(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}$

- $f(x)=2x+1$ sur $\mathbb{R}$

  $f_p(x)=x^2+x$

- $g(x)=10x^4+6x^3-1$ sur $\mathbb{R}$

  $g_p(x)=10\frac{x^5}{5}+6\frac{x^4}{4}-x=2x^5+\frac{3}{2}x^4-x$

- $h(x)=(x-1)(x+3)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

  $h(x)=x^2+2x-3$ donc $h_p(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$

- $i(x)=-\frac{4}{3x^5}$

  $i(x)=-\frac{4}{3}x^{-5}$ donc $i_p(x)=-\frac{4}{3}\frac{x^{-4}}{-4}=\frac{x^{-4}}{3}=\frac{1}{3x^4}$

- $j(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

  $j_p(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$

II. Intégrale et tableau de variations

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\big[-10\,;10\big]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
Variation de g	7	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-6

On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ b. $2 \leqslant I \leqslant 4$

c. $16 \leqslant I \leqslant 32$ d. $4 \leqslant I \leqslant 8$

Correction :

D'après le tableau de variations :

- Sur l'intervalle $\big[-5\,;3\big]$, la fonction g admet le nombre 2 pour valeur minimale. Ainsi, le rectangle ayant pour côté l'intervalle $\big[-5\,;3\big]$ et pour hauteur 2 est inclus dans le domaine sous courbe g entre -5 et 3.
  On en déduit :
  $$8\times 2 \leqslant \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$$
  $$16 \leqslant \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$$
- Sur l'intervalle $\big[-5\,;3\big]$, la fonction g admet le nombre 4 pour valeur maximale. Ainsi, le rectangle ayant pour côté l'intervalle $\big[-5\,;3\big]$ et pour hauteur 4 est inclus dans le domaine sous courbe g entre -5 et 3.
  On en déduit :
  $$\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8\times 4$$
  $$\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

On en déduit : $16 \leqslant \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$

La réponse correcte est c..

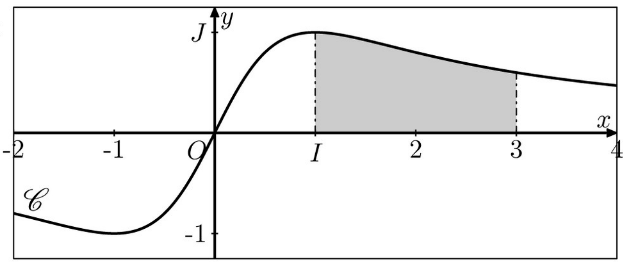
III. Valeur approchée d'un domaine

Exercice III.1

Correction : page suivante

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = \dfrac{2\cdot x}{x^2+1}$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

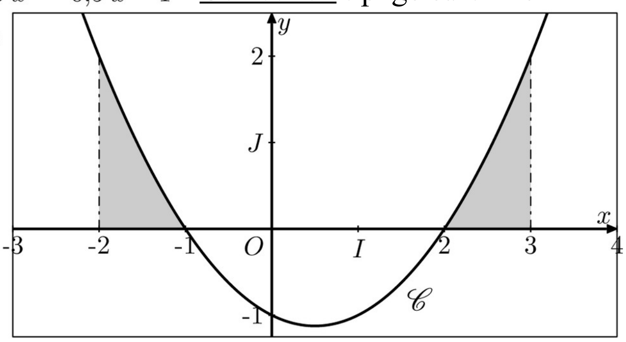
1. Décrire le domaine $\mathcal{D}$.
2. A l'aide de la calculatrice, détermine l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

Exercice III.2

Correction : page suivante

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = 0{,}5\cdot x^2 - 0{,}5\cdot x - 1$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :

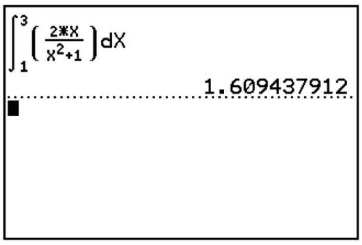


On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

A l'aide de la calculatrice, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

Correction III.1

1. Le domaine $\mathcal{D}$ est délimité par :
   - Les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
   - la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminons l'aire du domaine $\mathcal{D}$ qui est déterminé par le calcul intégral :
$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
   Voici des captures d'écran de la calculatrice permettant ce calcul d'intégral :

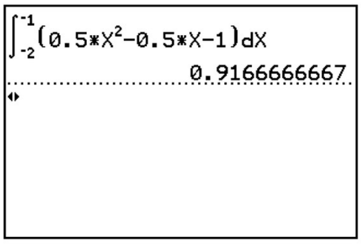


   Ainsi, on a la valeur approchée : $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1{,}6094$

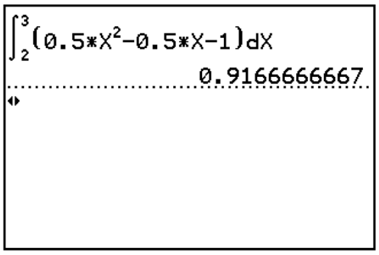
Correction III.2

Le domaine $\mathcal{D}$ est composé de deux sous-domaines :
- le domaine sous la courbe de f entre -2 et -1 ;
- le domaine sous la courbe de f entre 2 et 3.

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ se détermine par la somme suivante :
$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
Déterminons la valeur approchée de ces deux aires à l'aide de la calculatrice :
- Pour le domaine sous la courbe de f entre -2 et -1 :



  On a la valeur approchée : $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}91666$
- Pour le domaine sous la courbe de f entre 2 et 3 :



  On a la valeur approchée : $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}91667$

Ainsi, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ a pour valeur approchée :
$$\mathcal{A} \approx 0{,}91667 + 0{,}91667 \approx 1{,}83334 \approx 1{,}8333$$

IV. Calcul intégral à l'aide d'un logiciel de calcul formel

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par : $f(x) = (-2{\cdot}x + 30){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver$\left((-10{\cdot}x+200){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}\right)$ $(-2{\cdot}x+30){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
2	Dériver$\left((-2{\cdot}x+30){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}\right)$ $(-0{,}4{\cdot}x+4){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
3	Dériver$\left((-0{,}4{\cdot}x+4){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}\right)$ $(-0{,}08{\cdot}x+0{,}4){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction :

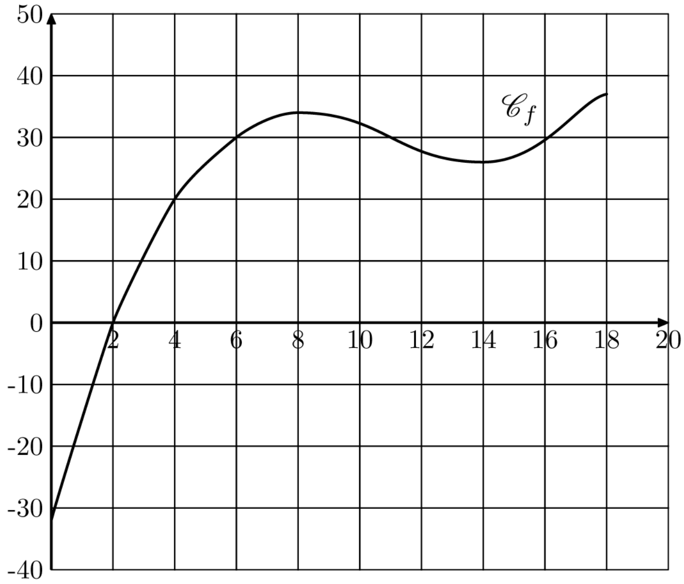
Notons F la fonction définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :
$$F(x) = (-10{\cdot}x+200){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$$
D'après les résultats du logiciel de calcul formel, on a :
$$F'(x) = (-2{\cdot}x+30){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} = f(x)$$
On en déduit que la fonction F est une primitive de la fonction f.

Par la fonction F, on a les images :
- $F(10) = (-10\times10+200){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times10-3} = (-100+200){\cdot}\mathrm{e}^{2-3} = 100{\cdot}\mathrm{e}^{-1}$
- $F(15) = (-10\times15+200){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times15-3} = (-150+200){\cdot}\mathrm{e}^{3-3} = 50{\cdot}\mathrm{e}^{0} = 50$

$$\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(15)-\mathrm{F}(10) = 50-100\,\mathrm{e}^{-1} = 50-\frac{100}{\mathrm{e}}$$

V. Déduire de la courbe d'une fonction des infos sur les primitives

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;18]$:



Laquelle des réponses ci-dessous est correcte?

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0\,;2]$.

b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8\,;12]$.

c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;2]$.

d. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8\,;12]$.

Correction :
Soit F une primitive de la fonction f

- Les réponses a. et b. sont fausses : Les autres primitives G s'obtiennent à partir de la primitive F en y additionnant une constante.
  Ainsi, il existe un réel k tel que :
  $G(x) = F(x) + k$
  Ainsi, il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la primitive G soit positive au moins une fois sur $[0\,;2]$ ou $[2\,;8]$.
- De la relation $F' = f$, on en déduit :
  - La fonction f étant négative sur $[0\,;2]$, on en déduit que la fonction F est décroissante sur $[0\,;2]$.
    Il en sera de même de toutes les primitives de la fonction f. L'affirmation c. est fausse.
  - La fonction f étant positive sur $[8\,;12]$, on en déduit que la fonction F est croissante sur $[8\,;12]$.
    Il en sera de même de toutes les primites de la fonction f.
    L'affirmation d. est vraie.

Source des exercices II, III, IV et V (et de leurs corrections) : chingatome.fr