T°S	SÉANCE DU VENDREDI 24 AVRIL 2020

I. Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\int_{-1}^1 (2t^2-1)\,\mathrm{d}t$ **c.** $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ **d.** $\int_1^3 \left(2t+1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ **e.** $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2+x+1}{x}\,\mathrm{d}x$ **f.** $\int_{-1}^1 \left(\mathrm{e}^t-\frac{\mathrm{e}^t}{2}\right)\mathrm{d}t$

Correction :

a) $\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln(x)]_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3$ *ie* $\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln 3$.

b) Une primitive de $2t^2-1$ sur $[-1;1]$ est $2\times\frac{1}{3}t^3-t=\frac{2}{3}t^3-t$ donc :

$$\int_{-1}^1 2t^2-1\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2t^3}{3}-t\right]_{-1}^1=\frac{2\times1^3}{3}-1-\left(\frac{2\times(-1)^3}{3}-(-1)\right)=\frac{2}{3}-1-\left(-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

ie $\int_{-1}^1 2t^2-1\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}$.

À partir de cette question, je ne détaille plus les « F(b)-F(a) », je mets … (à vous de le faire).

c) Une primitive de e^x sur $[-1;1]$ est e^x donc : $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_{-1}^1=\ldots=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$ *ie* $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Une primitive de $2t+1-\frac{1}{t^2}$ sur $[1;3]$ est $t^2+t+\frac{1}{t}$ (cours) donc :

$\int_1^3 2t+1-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\left[t^2+t+\frac{1}{t}\right]_1^3=\ldots=\frac{28}{3}$ *ie* $\int_1^3 2t+1-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{28}{3}$.

e) $\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$ donc une primitive de $\frac{x^2+x+1}{x}$ sur $\left[\frac{1}{2};2\right]$ est $\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x)$, donc :

$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2+x+1}{x}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^2=\ldots=2\ln(2)+\frac{27}{8}$ *ie* $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2+x+1}{x}\mathrm{d}x=2\ln(2)+\frac{27}{8}$.

Rappel : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

f) $\mathrm{e}^t-\frac{\mathrm{e}^t}{2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t$ donc une primitive de $\mathrm{e}^t-\frac{\mathrm{e}^t}{2}$ sur $[-1;1]$ est $\frac{1}{2}\mathrm{e}^t$, donc :

$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^t}{2}\right]_{-1}^1=\ldots=-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}+\frac{\mathrm{e}}{2}$ *ie* $\int_{-1}^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^t}{2}\right]_{-1}^1=-\frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{\mathrm{e}}{2}$.

II. Covid-19

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour, le nombre de malades est égal à $f(x)=16x^2-x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades sur la période de 16 jours.

Rappel de cours :

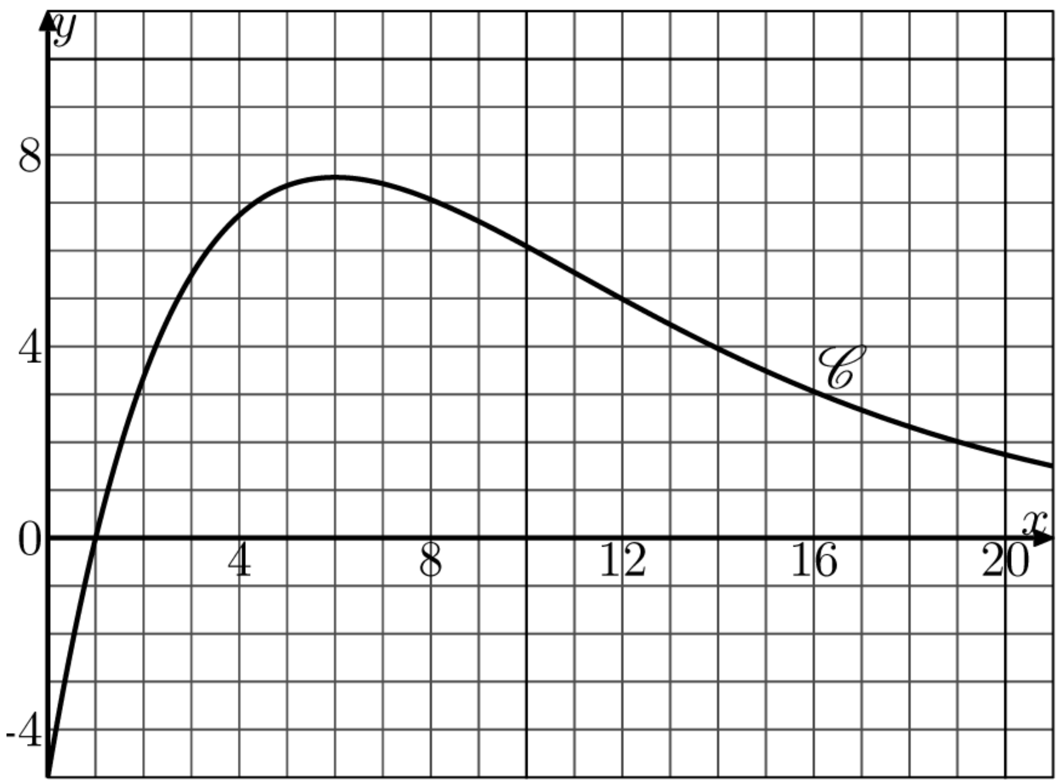
> **DÉFINITION.**
> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
> La ***valeur moyenne de la fonction f*** sur $[a;b]$ est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction détaillée en vidéo (≈ 7 min) : https://youtu.be/oVFHojz5y50

III. Encadrement d'une aire

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0;20]$.

Déterminer un encadrement d'amplitude 4, par deux nombres entiers, de : $\mathrm{I}=\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

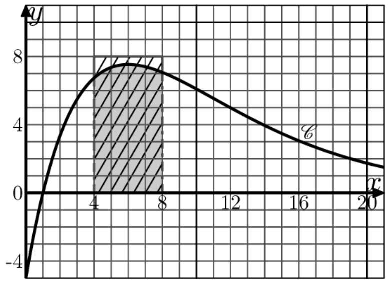


Correction :

Relativement aux deux domaines hachurés ci-dessous :

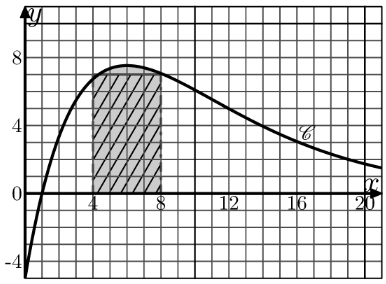
On a l'encadrement ci-dessous :

- Le domaine hachurée ci-dessous est un rectangle dont l'aire est : $8\times 4=32$



  Ce domaine comprend le domaine grisé défini par la courbe $\mathscr{C}$ et permet de donner la comparaison :
  $$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

- Le domaine hachurée ci-dessous est un rectangle dont l'aire est : $7\times 4=28$



  Ce domaine est "*presque*" entièrement contenu dans le domaine grisé défini par la courbe $\mathscr{C}$ et permet de donner la comparaison :
  $$28 \leqslant \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, nous avons l'encadrement ci-dessous d'amplitude 4 :
$$28 \leqslant \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

Source de l'exercice III : chingatome.fr