T°ES/LSPÉ — SÉANCE DU JEUDI 23 AVRIL 2020

I. Nombre dérivé (graphique) et calcul d'aire

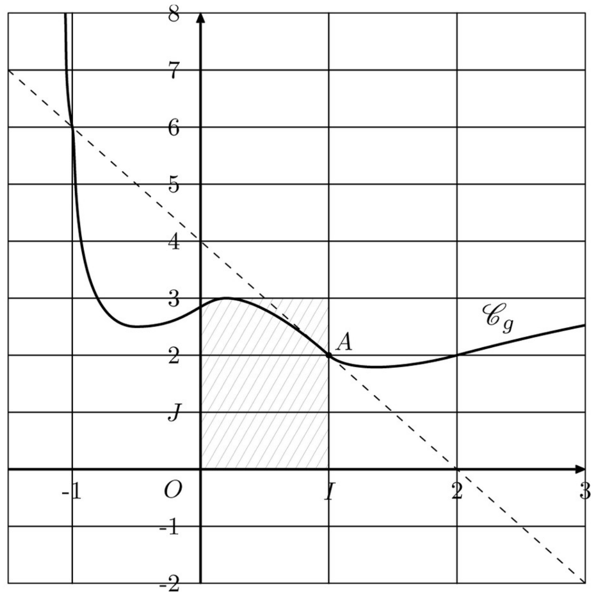
Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

- **Affirmation 1 :** $g'(1) = -2$
- **Affirmation 2 :** $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$



II. Problème concret, somme de valeurs et intégrale

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1$^{\text{er}}$ juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi, $x=30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par : $g(x) = 110 + 11\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$

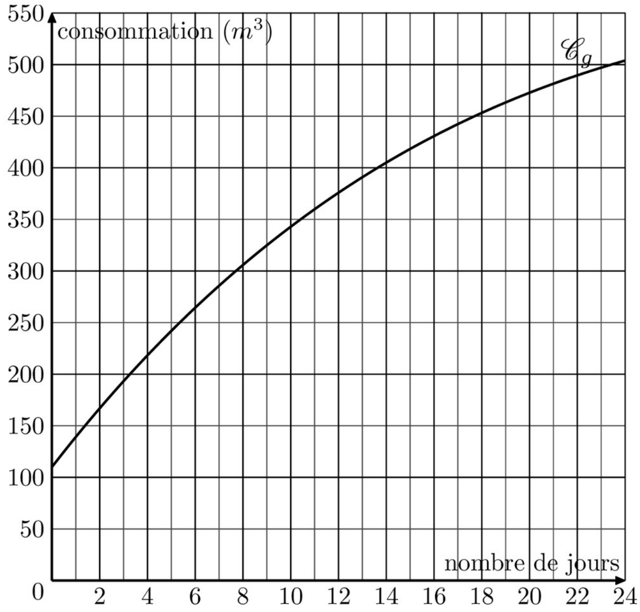
→

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $\left[0\,;70\right]$ par :
$G(x) = 110{\cdot}x - \left(440{\cdot}x + 17\,600\right){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S=g(10)+g(11)+g(12)+\cdots+g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10^e au 20^e jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathscr{C}_g$ ci-dessous, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.

2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10e au 20e jour.



III. Calcul d'intégrale (avec logiciel de calcul formel)

On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = \left(x^2 - 2{\cdot}x + 1\right){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x):=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\rightarrow f(x) = \left(x^2 - 2{\cdot}x + 1\right){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	`f'(x):=Dérivée[f(x)]` $\rightarrow f'(x) = \left(-2{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x - 4\right){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $\rightarrow g(x) = -16{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6} + 4{\cdot}x^2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6} + 14{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\rightarrow 2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}{\cdot}\left(2{\cdot}x^2 - 8{\cdot}x + 7\right)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\rightarrow \left\{x = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\, x = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L6	`F(x):=Primitive[f(x)]` $\rightarrow F(x) = \dfrac{1}{4}{\cdot}\left(-2{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 1\right){\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$

On pose $I=\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

IV. Dépense moyenne des ménages entre 1995 et 2015

Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels *(redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos,...)*.

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :
$f(x) = -0{,}0032\cdot x^3 + 0{,}06\cdot x^2 + 5$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$ par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.

2. Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.
   (Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul $p=\frac{\text{valeur réelle-valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ *et le résultat sera donnée à 0,1 % près.)*

3. En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013? *(On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).*

4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.
   On calcule pour cela : $M = \dfrac{1}{20}\cdot\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$

   a. Déterminer une primitive de F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

   b. Calculer M.

Pour terminer, je te demande, pour me prouver que tu as bien fait cette séance mais aussi avoir de tes nouvelles, d'aller remplir le questionnaire suivant, avant le vendredi 24 avril au soir :

cliquer ici

(le code à donner au début est CONFTESL2304)

Source des exercices : chingatome.fr
(certaines corrections ont été modifiées : erreurs d'arrondis etc. n'hésitez pas à me dire si vous voyez une erreur)

CORRECTIONS DES EXERCICES

I.

- **Affirmation 1 :** vraie

La tangente T passe par les points $A(1\,;2)$ et $B(2\,;0)$. Ainsi, le coefficient directeur de la tangente T a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

La droite T étant la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1, on en déduit :

$g'(1) = -2$

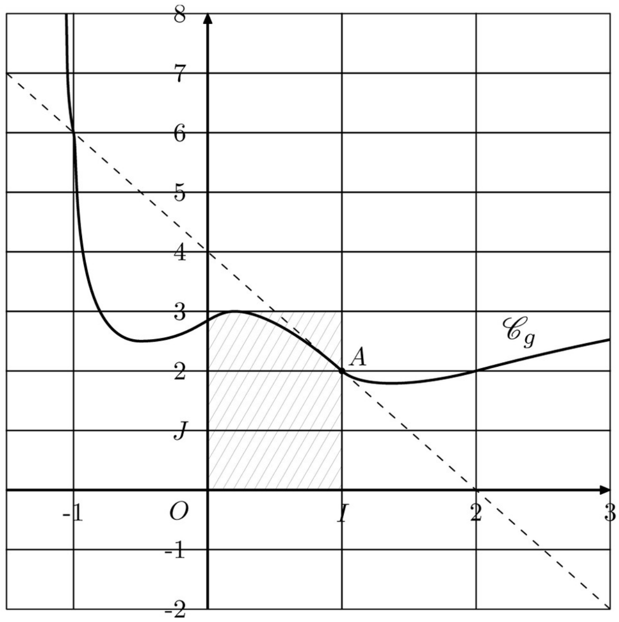
- **Affirmation 2 :** vraie

La fonction g étant positive sur $[0\,;1]$, on en déduit que le calcul intégral $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses
- les droites $x=0$ et $x=1$

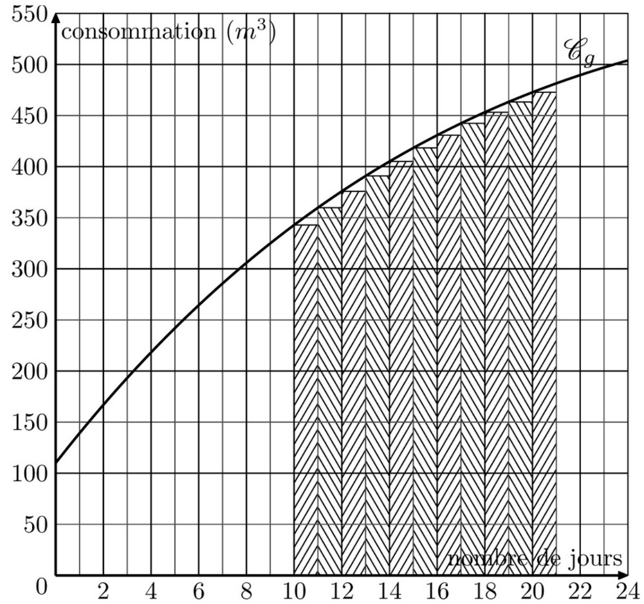
Le domaine grisé représenté ci-dessous représente ce domaine qui est inclus entièrement dans le domaine haché. En notant $\mathcal{A}$ l'aire du domaine haché, on a la comparaison :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{A}$$



II.

1. La somme S est la somme des aires des 11 rectangles représentés ci-dessous :



2. Pour obtenir une valeur approximative, nous pouvons effectuer le calcul de l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ entre 10 et 21. Ceci est possible par le calcul intégral :

$$\int_{10}^{21} g(x) = G(21) - G(10)$$

$$= \left[110\times21 - \left(440\times21 + 17\,600\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}025\times21+1}\right] - \left[110\times10 - \left(440\times10 + 17\,600\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}025\times10+1}\right]$$

$$= \left[2310 - \left(9240 + 17\,600\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}525+1}\right] - \left[1100 - \left(4400 + 17\,600\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}25+1}\right]$$

$$= \left(2310 - 26840\cdot\mathrm{e}^{0{,}475}\right) - \left(1100 - 22000\cdot\mathrm{e}^{0{,}75}\right)$$

$$= 2310 - 26840\cdot\mathrm{e}^{0{,}475} - 1100 + 22000\cdot\mathrm{e}^{0{,}75}$$

$$= 1210 - 26840\cdot\mathrm{e}^{0{,}475} + 22000\cdot\mathrm{e}^{0{,}75} \approx 4624{,}899 \approx 4624{,}90$$

III.

A l'aide des résultats du logiciel de calcul formel, la fonction F est une primitive de la fonction f et a pour expression :

$$F(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(-2\cdot x^2 + 2\cdot x - 1\right)\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$$

On a les images suivantes par la fonction F :

- $F(3) = \frac{1}{4}\cdot\left(-2\times 3^2 + 2\times 3 - 1\right)\cdot \mathrm{e}^{-2\times 3+6}$
  $= \frac{1}{4}\cdot\left(-2\times 9 + 6 - 1\right)\cdot \mathrm{e}^{-6+6} = \frac{1}{4}\cdot\left(-18+5\right)\cdot \mathrm{e}^{0}$
  $= \frac{1}{4}\cdot\left(-13\right)\times 1 = -\frac{13}{4}$
- $F(5) = \frac{1}{4}\cdot\left(-2\times 5^2 + 2\times 5 - 1\right)\cdot \mathrm{e}^{-2\times 5+6}$
  $= \frac{1}{4}\cdot\left(-2\times 25 + 10 - 1\right)\cdot \mathrm{e}^{-10+6} = \frac{1}{4}\cdot\left(-50+9\right)\cdot \mathrm{e}^{-4}$
  $= -\frac{41}{4}\cdot \mathrm{e}^{-4}$

Ainsi, on a le calcul intégral :

$$I = \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(3)$$

$$= -\frac{41}{4}\cdot \mathrm{e}^{-4} - \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{13}{4} - \frac{41}{4}\cdot \mathrm{e}^{-4}$$

IV.

1. $f(5) = -0{,}0032\times 5^3 + 0{,}06\times 5^2 + 5$
$= -0{,}0032\times 125 + 0{,}06\times 25 + 5 = -0{,}4 + 1{,}5 + 5 = 6{,}1$

2. Le pourcentage p de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$:

$$p = \frac{6{,}3 - 6{,}1}{6{,}3} \approx 3{,}2\,\%$$

3. La fonction f permet d'obtenir une estimation de la dépense totale en 2013 :

$$f(18) = -0{,}0032\times 18^3 + 0{,}06\times 18^2 + 5 = 5{,}7776$$

Ainsi, la dépense totale peut être estimée à 5,78 milliards d'euros.

4. a. Considérons la fonction F définie par :

$$F(x) = -0{,}0008\cdot x^4 + 0{,}02\cdot x^3 + 5\cdot x$$

Cette fonction F admet pour dérivée la fonction F' dont l'expression est :

$$F'(x) = -0{,}0008\cdot\left(4\cdot x^3\right) + 0{,}02\cdot\left(3\cdot x^2\right) + 5\times 1$$

$$= -0{,}0032\cdot x^3 + 0{,}06\cdot x^2 + 5 = f(x)$$

b. On a les valeurs :

- $F(0) = -0{,}0008\times 0^4 + 0{,}02\times 0^3 + 5\times 0 = 0$
- $F(20) = -0{,}0008\times 20^4 + 0{,}02\times 20^3 + 5\times 20$
  $= -128 + 160 + 100 = 132$

La valeur moyenne des dépenses des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015 a pour valeur :

$$M = \frac{1}{20}\cdot\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\cdot\left[F(20) - F(0)\right] = \frac{1}{20}\cdot\left(132 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{20}\times 132 = 6{,}6$$