T°S	SÉANCE DU LUNDI 20 AVRIL 2020

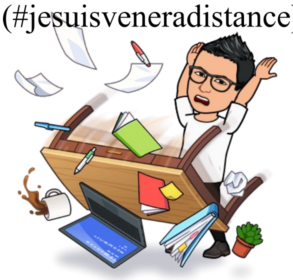
J'espère que vous avez passé de bonnes vacances, que tout va bien chez vous et que si ça va pas fort, vous vous répétez ma blague préférée : soit $\varepsilon<0$.

Nous savons maintenant que le Bac sera en contrôle continu (…), il semble pour l'instant que nous allons nous revoir d'ici la fin de l'année et que nous aurons le mois de juin pour travailler… Enfin… si les conditions sanitaires sont réunies, sinon je refuserai de revenir, pour vous et pour moi. Nous verrons.
Comme déjà dit dans ma lettre déchirante de pré-vacances, je compte sur vous pour faire les séances. Inch'Allah qu'on pourra peut-être se revoir et faire une interro d'ici fin juin.

Lors de la dernière séance, je vous avais demandé de faire pour aujourd'hui au moins 3 exercices de Bac sur le produit scalaire (géométrie vectorielle).

Si ce n'est pas fait :  Si c'est fait : 

Nous avions donc terminé toutes les notions de géométrie au programme, et il faut bien s'entraîner à faire des exercices qui mélangent tout. Me doutant bien que certains n'ont rien fait (#jesuisveneradistance), reprenons là où nous en étions resté afin de faire une piqûre de rappel.
Demain nous passerons au chapitre suivant.



Rappels : comme d'habitude n'hésitez pas à m'écrire s'il y a une question ou un doute sur mes corrections : mathemathieu@free.fr.
N'hésitez pas à re-télécharger les fichiers PDF si vous pensez qu'il y a une erreur : si c'est le cas et qu'on me l'a signalé, je corrige assez vite le fichier.

0. Transition post-vacances : simuler, c'est mal ?

La pandémie continue son œuvre… Des centaines de mathématiciens et épidémiologistes tentent de comprendre comment le virus se propage : ce type de problème mathématique (dynamique de populations) est complexe et il convient donc de le modéliser en simplifiant les paramètres. Je vous invite fortement à lire cet article sur mon site, qui contient un lien vers deux vidéos : même si vous ne regardez pas les vidéos (quel dommage) et ne jouez pas avec le simulateur (pfff), lisez les 5 conclusions qu'on peut tirer de telles simulations ; il faut, selon moi, les lire et les relire pour mieux s'en sortir quand nous sortirons du confinement. La fin d'une vidéo parle aussi de 'contact tracing', qu'on va nous inciter à suivre (ou nous l'imposer) dans les jours qui viennent, et cela pourrait d'ailleurs rejoindre des questions que vous traitez en philosophie (liberté et sécurité) mais qu'il serait intéressant d'analyser d'un point de vue strictement politique…

I. Les derniers seront les premiers (Céline Dion)

https://youtu.be/xymkI4Fh5e8

Faire au moins 2 exercices de la fiche de 14 exercices citée au II. de la dernière séance : choisissez-les bien, essayez d'en prendre que vous ne trouvez pas évidents en lisant l'énoncé.

Si vous aviez déjà fait 3 exercices pendant les vacances et 1 pendant la dernière séance (bravo !), ça tombe bien car $3+1=4$ [modulo 10] et il y a 14 exercices (même à distance, j'arrive à être sadique et à y prendre du plaisir juste en imaginant vos têtes).

dédicace aux spé maths (i love you)

Et si vous avez déjà tout fait : allez vous reposer bon sang !

II. Sphère et plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

Partie A

Soit a, b, c et d des réels tels que : $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$.

On considère le point I de coordonnées $(x_I\,;y_I\,;z_I)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a\,;b\,;c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

$$\frac{|a\cdot x_I+b\cdot y_I+c\cdot z_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
   Déterminer, en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.
   a. Justifier qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{IH}=k\,\vec{n}$.
   b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I.
   c. En déduire que : $IH=\dfrac{|a\cdot x_I+b\cdot y_I+c\cdot z_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Axel, je te vois rire…

Partie B

Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1\,;-1\,;3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$.
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.

Correction : voir page suivante

Partie A

1. Le plan $\mathcal{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a\,;b\,;c)$ pour vecteur normal ; ainsi, la droite Δ passe par le point I et admet le vecteur $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur, on a :

$$\begin{cases} x = x_I + a{\cdot}t \\ y = y_I + b{\cdot}t \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \\ z = z_I + c{\cdot}t \end{cases}$$

2. a. On a déj'à vu que la droite Δ admet le vecteur $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{n}$ étant deux vecteurs directeurs de la droite Δ, on en déduit que ces deux vecteurs sont colinéaires : il existe un réel k vérifiant :
$\overrightarrow{IH} = k{\cdot}\overrightarrow{n}$

b. On a les deux coordonnées suivantes de vecteurs :

- $\overrightarrow{IH}\,(x_H - x_I\,;y_H - y_I\,;z_H - z_I)$
- $k{\cdot}\overrightarrow{n}\,\big(k{\cdot}a\,;k{\cdot}b\,;k{\cdot}c\big)$

D'après la question précédente, on a :

$$\overrightarrow{IH} = k{\cdot}\overrightarrow{n} \implies \begin{cases} x_H - x_I = k\cdot a \\ y_H - y_I = k\cdot b \\ z_H - z_I = k\cdot c \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_H = x_I k\cdot a \\ y_H = y_I + k\cdot b \\ z_H = z_I + k\cdot c \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées du point H :
$H\big(x_I + a{\cdot}k\,;y_I + b{\cdot}k\,;z_I + c{\cdot}k\big)$

Le point H appartennant au plan $\mathcal{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$a{\cdot}x_H + b{\cdot}y_H + c{\cdot}z_H + d = 0$$
$$a{\cdot}\big(x_I + a{\cdot}k\big) + b{\cdot}\big(y_I + b{\cdot}k\big) + c{\cdot}\big(z_I + c{\cdot}k\big) + d = 0$$
$$a{\cdot}x_I + a^2{\cdot}k + b{\cdot}y_I + b^2{\cdot}k + c{\cdot}z_I + c^2{\cdot}k + d = 0$$
$$a{\cdot}x_I + b{\cdot}y_I + c{\cdot}z_I + d = -a^2{\cdot}k - b^2{\cdot}k - c^2{\cdot}k$$
$$a{\cdot}x_I + b{\cdot}y_I + c{\cdot}z_I + d = -\big(a^2 + b^2 + c^2\big){\cdot}k$$
$$k = -\frac{a{\cdot}x_I + b{\cdot}y_I + c{\cdot}z_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

c. De l'égalité vectorielle suivante, on en déduit :

$$\overrightarrow{IH} = k{\cdot}\overrightarrow{n}$$
$$\big\|\overrightarrow{IH}\big\| = \big\|k{\cdot}\overrightarrow{n}\big\|$$
$$IH = |k|{\cdot}\big|\overrightarrow{n}\big\|$$
$$IH = \left| -\frac{a{\cdot}x_I + b{\cdot}y_I + c{\cdot}z_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right|{\cdot}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$IH = \frac{\big|a{\cdot}x_I + b{\cdot}y_I + c{\cdot}z_I + d\big|}{a^2 + b^2 + c^2}{\cdot}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$IH = \frac{\big|a{\cdot}x_I + b{\cdot}y_I + c{\cdot}z_I + d\big|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B

1. Nommons A le point d'intersection du plan $\mathcal{Q}$ et de la sphère $\mathscr{S}$; ainsi, la droite $(A\Omega)$ est orthogonale au plan $\mathcal{Q}$.
Plus précisément, le point A est le projeté de Ω sur le plan $\mathcal{Q}$.

On en déduit que le rayon de la sphère $\mathscr{S}$ est la distance séparant le point Ω au plan $\mathcal{Q}$:

$$d\big(A\,;\Omega\big) = \frac{|a{\cdot}x_\Omega + b{\cdot}y_\Omega + c{\cdot}z_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$= \frac{|1{\times}1 + (-1){\times}(-1) + 1{\times}3 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 1 + 3 - 11|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}$$
$$= \frac{|-6|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6{\cdot}\sqrt{3}}{3} = 2{\cdot}\sqrt{3}$$

La sphère a un rayon de $2{\cdot}\sqrt{3}$.

2. La droite Δ admet pour vecteur normal, le vecteur $\overrightarrow{n}\,\big(1\,;-1\,;1\big)$; passant par le point Ω, elle admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

3. Notons M le point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathcal{Q}$. Ses coordonnées vérifient les coordonnées du plan $\mathcal{Q}$:

$$x_M - y_M + z_M - 11 = 0$$

Le point M est également un point de Δ :

$$(1 + t) - (-1 - t) + (3 + t) - 11 = 0$$
$$1 + t + 1 + t + 3 + t - 11 = 0$$
$$3{\cdot}t - 6 = 0$$
$$3{\cdot}t = 6$$
$$t = 2$$

Ainsi, le point M a pour coordonnées :
$M\big(1 + t\,;-1 - t\,;3 + t\big) = \big(1 + 2\,;-1 - 2\,;3 + 2\big)$
$= \big(3\,;-3\,;5\big)$

Source de l'exercice : chingatome.fr