T°ES/LSPÉ	SÉANCE DU MARDI 21 AVRIL 2020

J'espère que vous avez passé de bonnes vacances. Nous savons que le Bac sera en contrôle continu, et il semble pour l'instant que nous allons nous revoir d'ici la fin de l'année et que nous aurons le mois de juin pour travailler… Enfin si les conditions sanitaires sont réunies, sinon je refuserai de revenir, pour vous et pour moi. Nous verrons.
Nous allons donc insister sur les intégrales, c'est un chapitre important et souvent utilisé en post-Bac : ne bâclons pas ce chapitre. Aujourd'hui, revenons sur des questions classiques au Bac.

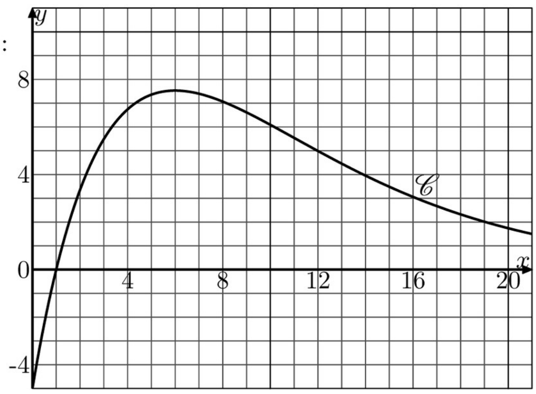
Rappels : comme d'habitude n'hésitez pas à m'écrire s'il y a une question ou un doute sur mes corrections :
mathemathieu@free.fr.
N'hésitez pas à re-télécharger ce fichier PDF si vous pensez qu'il y a une erreur : si c'est le cas et qu'on me l'a signalé, je corrige assez vite le fichier.

I. Encadrement d'une aire

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de :

$$I = \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$



II. Intégrale et tableau de variations

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10\,;10]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10	-5	3	10
Variation de g	7 ↘	2 ↗	4 ↘	-6

On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ b. $2 \leqslant I \leqslant 4$

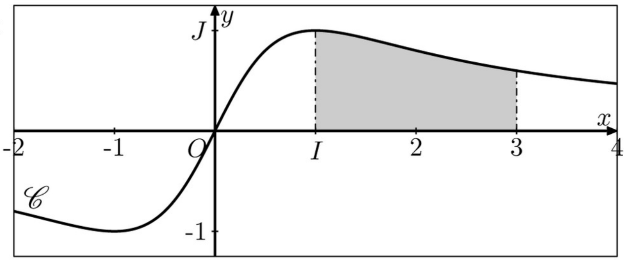
c. $16 \leqslant I \leqslant 32$ d. $4 \leqslant I \leqslant 8$

III. Valeur approchée d'un domaine

Exercice III.1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = \dfrac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



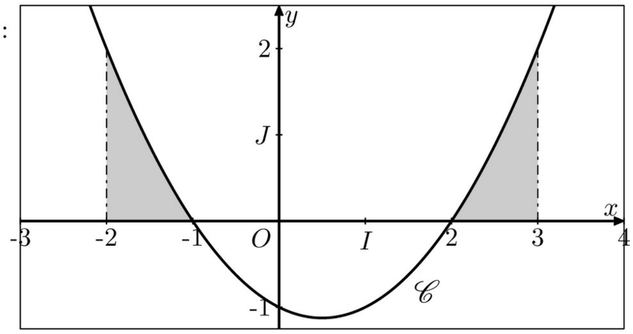
On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

1. Décrire le domaine $\mathcal{D}$.
2. A l'aide de la calculatrice, détermine l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

Exercice III.2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x - 1$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

A l'aide de la calculatrice, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

IV. Calcul intégral à l'aide d'un logiciel de calcul formel

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-20\,;20\right]$ par : $f(x) = \left(-2 \cdot x + 30\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver$\left(-10 \cdot x + 200\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$ $\left(-2 \cdot x + 30\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$
2	Dériver$\left(-2 \cdot x + 30\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$ $\left(-0{,}4 \cdot x + 4\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$
3	Dériver$\left(-0{,}4 \cdot x + 4\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$ $\left(-0{,}08 \cdot x + 0{,}4\right) \cdot \mathrm{e}^{0{,}2 \cdot x - 3}$

Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

V. Calcul intégral (on vous donne une primitive)

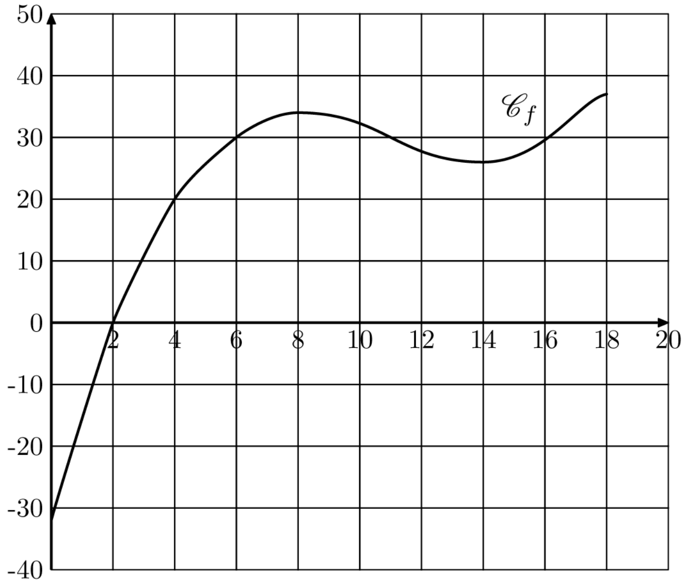
On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;15\right]$ par : $f(x) = 9 \cdot x^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln x\right) + 10$

On donne la fonction F définie sur l'intervalle $\left]0\,;1{,}5\right]$ par : $F(x) = 10 \cdot x + 5 \cdot x^3 - 6x^3 \cdot \ln x$

1. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\left]0\,;1{,}5\right]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{1}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera le résultat arrondi au centième.

VI. Déduire de la courbe d'une fonction des infos sur les primitives

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;18]$:



Laquelle des réponses ci-dessous est correcte?

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0\,;2]$.

b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8\,;12]$.

c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;2]$.

d. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8\,;12]$.

Source des exercices (et de leurs corrections) : l'excellent site chingatome.fr

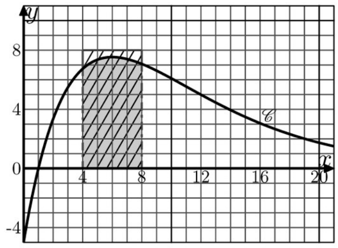
CORRECTIONS DES EXERCICES

I.

Relativement aux deux domaines hachurés ci-dessous :

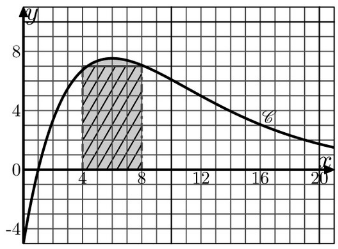
On a l'encadrement ci-dessous :

- Le domaine hachurée ci-dessous est un rectangle dont l'aire est : $8\times 4 = 32$



Ce domaine comprend le domaine grisé défini par la courbe $\mathscr{C}$ et permet de donner la comparaison :
$$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

- Le domaine hachurée ci-dessous est un rectangle dont l'aire est : $7\times 4 = 28$



Ce domaine est "*presque*" entièrement contenu dans le domaine grisé défini par la courbe $\mathscr{C}$ et permet de donner la comparaison :
$$28 \leqslant \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, nous avons l'encadrement ci-dessous d'amplitude 4 :
$$28 \leqslant \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

II.

D'après le tableau de variations :

- Sur l'intervalle $[-5\,;3]$, la fonction g admet le nombre 2 pour valeur minimale. Ainsi, le rectangle ayant pour côté l'intervalle $[-5\,;3]$ et pour hauteur 2 est inclus dans le domaine sous courbe g entre -5 et 3.
On en déduit :
$$8\times 2 \leqslant \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$16 \leqslant \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$$
- Sur l'intervalle $[-5\,;3]$, la fonction g admet le nombre 4 pour valeur maximale. Ainsi, le rectangle ayant pour côté l'intervalle $[-5\,;3]$ et pour hauteur 4 est inclus dans le domaine sous courbe g entre -5 et 3.
On en déduit :
$$\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8\times 4$$
$$\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

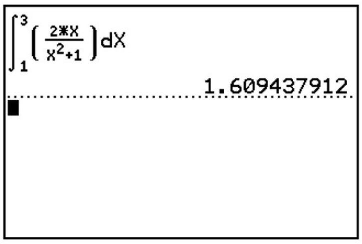
On en déduit : $16 \leqslant \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$

La réponse correcte est c. .

III.1

1. Le domaine $\mathcal{D}$ est délimité par :
   - Les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
   - la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminons l'aire du domaine $\mathcal{D}$ qui est déterminé par le calcul intégral :
   $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

   Voici des captures d'écran de la calculatrice permettant ce calcul d'intégral :



   Ainsi, on a la valeur approchée : $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1{,}6094$

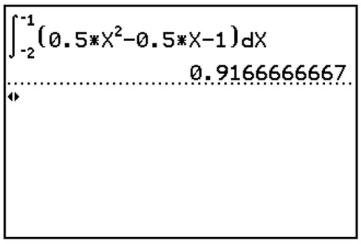
III.2

Le domaine $\mathcal{D}$ est composé de deux sous-domaines :

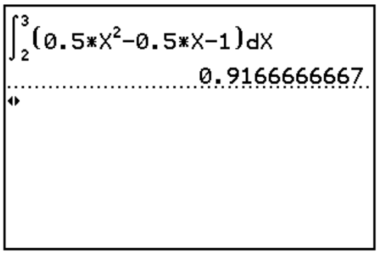
- le domaine sous la courbe de f entre -2 et -1 ;
- le domaine sous la courbe de f entre 2 et 3.

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ se détermine par la somme suivante :
$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
Déterminons la valeur approchée de ces deux aires à l'aide de la calculatrice :

- Pour le domaine sous la courbe de f entre -2 et -1 :



  On a la valeur approchée : $\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}91666$
- Pour le domaine sous la courbe de f entre 2 et 3 :



  On a la valeur approchée : $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}91667$

Ainsi, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ a pour valeur approchée :
$\mathcal{A} \approx 0{,}91667 + 0{,}91667 \approx 1{,}83334 \approx 1{,}8333$

IV.

Notons F la fonction définie sur l'intervalle $\left[-20\,;20\right]$ par :
$F(x) = \left(-10{\cdot}x + 200\right){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

D'après les résultats du logiciel de calcul formel, on a :
$F'(x) = \left(-2{\cdot}x + 30\right){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} = f(x)$

On en déduit que la fonction F est une primitive de la fonction f.

Par la fonction F, on a les images :

- $F(10) = \left(-10\times10 + 200\right){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times10-3} = \left(-100+200\right){\cdot}\mathrm{e}^{2-3}$
$= 100{\cdot}\mathrm{e}^{-1}$
- $F(15) = \left(-10\times15 + 200\right){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times15-3} = \left(-150+200\right){\cdot}\mathrm{e}^{3-3}$
$= 50{\cdot}\mathrm{e}^{0} = 50$

$$\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(15) - \mathrm{F}(10) = 50 - 100\,\mathrm{e}^{-1} = 50 - \frac{100}{\mathrm{e}}$$

V.

1. L'expression de la fonction F est donnée sous la forme :
$F(x) = 10{\cdot}x + 5{\cdot}x^3 - u(x){\cdot}v(x)$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x) = 6x^3 \quad ; \quad v(x) = \ln x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 18{\cdot}x^2 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction F' dérivée de la fonction F :

$F'(x) = 10 + 15{\cdot}x^2 - \left[u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)\right]$

$= 10 + 15{\cdot}x^2 - 18{\cdot}x^2{\cdot}\ln x - 6{\cdot}x^3{\cdot}\dfrac{1}{x}$

$= 10 + 15{\cdot}x^2 - 18{\cdot}x^2{\cdot}\ln x - 6{\cdot}x^2 = 10 + 9{\cdot}x^2 - 18{\cdot}x^2{\cdot}\ln x$

$= 9{\cdot}x^2{\cdot}\left(1 - 2{\cdot}\ln x\right) + 10$

2. $\displaystyle\int_1^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[10{\cdot} + 5{\cdot}x^3 - 6{\cdot}6x^3{\cdot}\log x\right]_1^{1{,}5}$

$= \left(10\times1{,}5 + 5\times1{,}5^3 - 6\times1{,}5^3{\cdot}\ln 1{,}5\right)$
$\quad -\left(10\times1 + 5\times1^3 - 6\times1{\cdot}\ln 1\right)$

$= 15 + 16{,}875 - 20{,}25{\cdot}\ln 1{,}5 - 10 - 5 + 6\times1\times0$

$= 16{,}875 - 20{,}25{\cdot}\ln 1{,}5$

$\approx 8{,}6643 \approx 8{,}66$

VI.

Soit F une primitive de la fonction f

- Les réponses a. et b. sont fausses : Les autres primitives G s'obtiennent à partir de la primitive F en y additionnant une constante.
Ainsi, il existe un réel k tel que :
$G(x) = F(x) + k$
Ainsi, il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la primitive G soit positive au moins une fois sur $\left[0\,;2\right]$ ou $\left[2\,;8\right]$.
- De la relation $F' = f$, on en déduit :
  - La fonction f étant négative sur $\left[0\,;2\right]$, on en déduit que la fonction F est décroissante sur $\left[0\,;2\right]$.
  Il en sera de même de toutes les primitives de la fonction f. L'affirmation c. est fausse.
  - La fonction f étant positive sur $\left[8\,;12\right]$, on en déduit que la fonction F est croissante sur $\left[8\,;12\right]$.
  Il en sera de même de toutes les primites de la fonction f.
  L'affirmation d. est vraie.