

I. Cours sur les nombres premiers

Lire attentivement le cours sur les nombres premiers.

Bien lire les démonstrations du I., qui ne sont pas difficiles et qui sont intéressantes, même pour le Bac (je pense notamment à la démonstration qu'il existe une infinité de nombres premiers, grand classique !).

Les démonstrations du II. Ne sont à lire et comprendre que pour ceux qui demandent une prépa MPSI/PCSI ou une licence de mathématiques.

Je vous recopie ci-dessous les propriétés importantes à retenir avec quelques commentaires.

PROPRIÉTÉ . $n \geq 2$

Si n n'est pas premier, alors n admet au moins un diviseur premier p et $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

PROPRIÉTÉ . $n \geq 2$

Si n n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$, alors n est premier.

Exemples : si je vous demande si 1053 est premier, comme $\sqrt{1053} \approx 32,4$, alors il suffit de tester si 1053 est divisible par les nombres premiers inférieurs à 32, c'est-à-dire 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31. Ici, 1053 est divisible par 3, donc on en déduit que **1053 n'est pas premier**.

Mais avec 1051, le même raisonnement conduit à dire que **1051 est premier**.

PROPRIÉTÉ .

Il existe une infinité de nombres premiers.

PROPRIÉTÉ .

La décomposition en produit de facteurs premiers de tout nombre entier naturel $n \geq 2$ est unique.

Bien sûr, on parle ici d'unicité à l'ordre des facteurs près : $7 \times 11 \times 13$ est la même chose que $11 \times 13 \times 7$.

Exemples : $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$ $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

PROPRIÉTÉ .

Les diviseurs de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_r^{\alpha_r}$ sont les entiers $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_r^{\beta_r}$
où $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$, $0 \leq \beta_3 \leq \alpha_3$, ..., $0 \leq \beta_r \leq \alpha_r$.

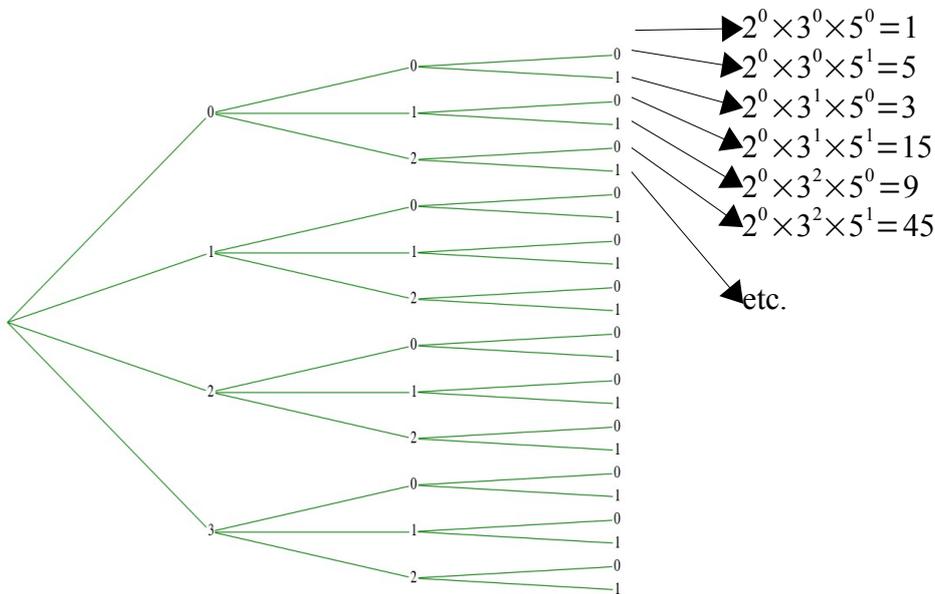
Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

donc pour trouver l'ensemble des diviseurs de 360, je choisis β_1 entre 0 et 3, β_2 entre 0 et 2, β_3 entre 0 et 1, puis je calcule $2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3}$. En faisant « varier » β_1 , β_2 et β_3 j'obtiens tous les diviseurs.

Finalement, cela revient à faire un arbre de dénombrement, comme on l'a fait en début d'année : je conseille d'ailleurs de faire comme cela pour n'oublier aucun diviseur (voir page suivante).

Il y a alors $4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.



PROPRIÉTÉ . $a \geq 2$ et $b \geq 2$
 Le PGCD de a et b est égal au produit des facteurs premiers communs aux décompositions de a et b , chacun d'eux étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans a et b .

Exemple : $194040 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$ et $411600 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7^3$
 donc $\text{PGCD}(194040; 411600) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 5880$.

Vous pouvez d'ailleurs calculer le PGCD de deux nombres sur votre calculatrice CASIO, je le rappelle (OPTN → NUM → GCD).

Je rajoute une propriété :

l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

Exemple : si vous cherchez les diviseurs communs à 2730 et 5610, il suffit de chercher les diviseurs communs de 30 (car $\text{PGCD}(5610; 2730) = 30$, trouvé par exemple avec l'algorithme d'Euclide).

Si vous n'êtes pas à l'aise, Yvan Monka est votre ami pour cet exemple ([lien](#)).

II. Les nombres de Fermat

Lien : <https://www.mathemathieu.fr/component/attachments/download/419>

Faire toute l'activité*, qui consiste à conjecturer et démontrer des propriétés des nombres de Fermat, c'est-à-dire les nombres du type $2^{2^n} + 1$: en 1640, Pierre de Fermat (mort à Castres [^] _^) énonce son petit théorème et explique que tous ces nombres sont premiers... Il s'agira de la seule conjecture erronée de Fermat !

* les trois dernières pages sont là pour vous donner une idée de l'état actuel de la recherche, ne les imprimez pas

Correction détaillée (on dit merci qui ?) :

<https://www.mathemathieu.fr/component/attachments/download/1280>

Remarque : les exercices présents dans cette fiche ont déjà fait l'objet d'exercices de Bac (récemment : Amérique du Sud, novembre 2018 ; sujet et corrigé disponibles [ici](#) si vous voulez voir à quel point c'est ressemblant).

III. Exercice de Bac : Asie 2014

Voici un exercice de Bac tombé en 2014 : il traite de l'infinité des nombres premiers et du test de Lucas-Lehmer... Tout cela doit vous dire quelque chose désormais, n'est-ce pas ? Vous verrez ainsi le lien entre les activités que l'on fait et les sujets qui tombent. Normalement, le sujet de Bac est plus simple que les activités, car vous êtes guidés :)

Lien vers le sujet + correction (page 1 = sujet ; pages 2/3 = correction).

IV. Pas de vacances pour l'élite de la Nation

Je décooooooooooonne ! Bonnes vacances !



(vous pouvez en profiter tout de même pour refaire d'anciens exercices, ou des exercices Bac, y'en a [ici](#))