T°ES/LSPÉ | SÉANCE DU JEUDI 2 AVRIL 2020

Comme d'habitude n'hésitez pas à m'écrire s'il y a une question ou un doute sur mes corrections :
mathemathieu@free.fr.
N'hésitez pas à re-télécharger ce fichier PDF si vous pensez qu'il y a une erreur : si c'est le cas et qu'on me l'a signalé, je corrige assez vite le fichier.

I. Exercice 29 p192 (recherche de primitives)

Correction :

a) Une primitive de $f(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^4}+1$ sur $]-\infty;0[$ est : $F(x)=-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}+x$.

Rédaction : • Une primitive de $\frac{4}{x^2}$ est $-\frac{4}{x}$.

En effet, $\frac{4}{x^2}=4x^{-2}$ donc une primitive est $4\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-4x^{-1}=-\frac{4}{x}$.

• Une primitive de $-\frac{3}{x^4}$ est $\frac{1}{x^3}$.

En effet, $-\frac{3}{x^4}=-3x^{-4}$ donc une primitive est $-3\times\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$.

• Une primitive de 1 est x.

• $f(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^4}+1$ donc une primitive de f est : $F(x)=-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}+x$.

b) Une primitive de $f(x)=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}-\frac{4}{x^5}$ sur $]-\infty;0[$ est : $F(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{x^4}$.

Rédaction : • Une primitive de $-\frac{1}{x^3}$ est $\frac{1}{2x^2}$.

En effet, $-\frac{1}{x^3}=-x^{-3}$ donc une primitive est $-\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}=\frac{1}{2}x^{-2}=\frac{1}{2x^2}$.

• Une primitive de $\frac{2}{x^4}$ est $-\frac{2}{3x^3}$.

En effet, $\frac{2}{x^4}=2x^{-4}$ donc une primitive est $2\times\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}=-\frac{2}{3}x^{-3}=-\frac{2}{3x^3}$.

• Une primitive de $-\frac{4}{x^5}$ est .

En effet, $-\frac{4}{x^5}=-4x^{-5}$ donc une primitive est $-4\times\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$.

• $f(x)=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}-\frac{4}{x^5}$ donc une primitive de f est : $F(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{x^4}$.

Remarque : en mettant au même dénominateur ($6x^4$) on trouve aussi : $F(x)=\frac{3x^2-4x+6}{6x^4}$.

c) Une primitive de $f(x)=2x-5-\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$ est : $F(x)=x^2-5x+\frac{2}{3x^3}-\ln(x)$.

Rédaction : • Une primitive de $2x-5$ est x^2-5x .

• Une primitive de $-\frac{2}{x^4}$ est $\frac{2}{3x^3}$. ← déjà vu au b)

• Une primitive de $-\frac{1}{x}$ est $-\ln(x)$. ← attention à ne pas faire comme précédemment

• $f(x)=2x-5-\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x}$ donc une primitive de f est : $F(x)=x^2-5x+\frac{2}{3x^3}-\ln(x)$.

II. Exercice 34 p193 : déterminer un coût total à partir du coût marginal

Correction : On note C le coût total de production.

En économie, on sait que l'approximation suivante est faite : $C_m=C'$.

Ici, on connaît C_m , donc on cherche une primitive de C_m :

$C_m(q)=\frac{q^2}{5}-\frac{24}{5}q+\frac{194}{5}$ donc $C_m(q)=\frac{1}{5}q^2-\frac{24}{5}q+\frac{194}{5}$

et les primitives de C_m sont les fonctions $F(q)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}q^3-\frac{24}{5}\times\frac{1}{2}q^2+\frac{194}{5}q+k$ où $k\in\mathbb{R}$

c'est-à-dire les fonctions $F(q)=\frac{1}{15}q^3-\frac{12}{5}q^2+\frac{194}{5}q+k$ où $k\in\mathbb{R}$.

Or, on sait que les coûts fixes sont de 120 000 € donc : $F(0)=120$ *ie* $k=120$.

Conclusion : le coût total de production est $C(q)=\frac{1}{15}q^3-\frac{12}{5}q^2+\frac{194}{5}q+120$.

III. Exercice 47 p195 : calculs d'intégrales

Correction :

a) Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $[1;3]$ est $\ln(x)$ donc : $\int_1^3\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln(x)]_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3$ *ie* $\int_1^3\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 3$.

b) Une primitive de $2t^2-1$ sur $[-1;1]$ est $2\times\frac{1}{3}t^3-t=\frac{2}{3}t^3-t$ donc :

$$\int_{-1}^{1}2t^2-1\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2t^3}{3}-t\right]_{-1}^{1}=\frac{2\times1^3}{3}-1-\left(\frac{2\times(-1)^3}{3}-(-1)\right)=\frac{2}{3}-1-\left(-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

ie $\int_{-1}^{1}2t^2-1\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}$.

À partir de cette question, je ne détaille plus les « F(b)-F(a) », je mets … (à vous de le faire).

c) Une primitive de e^x sur $[-1;1]$ est e^x donc :

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{-1}^{1} = \ldots = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \quad \textit{ie} \quad \boxed{\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

d) Une primitive de $2t+1-\frac{1}{t^2}$ sur $[1;3]$ est $t^2+t+\frac{1}{t}$ (cours) donc :

$$\int_{1}^{3} 2t+1-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[t^2+t+\frac{1}{t}\right]_1^3 = \ldots = \frac{28}{3} \quad \textit{ie} \quad \boxed{\int_{1}^{3} 2t+1-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{28}{3}}.$$

e) $\frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$ donc une primitive de $\frac{x^2+x+1}{x}$ sur $\left[\frac{1}{2};2\right]$ est $\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x)$, donc :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2+x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \ldots = 2\ln(2)+\frac{27}{8} \quad \textit{ie} \quad \boxed{\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2+x+1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2)+\frac{27}{8}}.$$

Rappel : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

f) $\mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^t}{2} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t$ donc une primitive de $\mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^t}{2}$ sur $[-1;1]$ est $\frac{1}{2}\mathrm{e}^t$, donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^t}{2}\right]_{-1}^{1} = \ldots = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}+\frac{\mathrm{e}}{2} \quad \textit{ie} \quad \boxed{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^t}{2}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{\mathrm{e}}{2}}.$$

IV. Encore des primitives

Vous l'avez compris, le « nerf de la guerre » est de savoir calculer des primitives… puisqu'ensuite, pour calculer une intégrale, il suffit d'appliquer la formule $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$. J'insiste donc encore sur les calculs de primitives, ce qui est le plus difficile.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

- $a(x) = x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
- $c(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$
- $d(x) = 1-x+x^2-x^3$ sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = 2x+1$ sur $\mathbb{R}$
- $g(x) = 10x^4+6x^3-1$ sur $\mathbb{R}$
- $h(x) = (x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$
- $i(x) = -\frac{4}{3x^5}$ sur $\mathbb{R}$
- $q(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$ sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$
- $s(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ sur $]2;3[$
- $z(x) = 3\mathrm{e}^{-4x}$ sur $\mathbb{R}$
- $b(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$
- $e(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- $j(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

- $m(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{4}\right[$
- $n(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
- $k(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- $p(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

Correction :

On notera ici toujours par une minuscule la fonction, et par une majuscule une de ses primitives.

- $a(x)=x^2-5x+\dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

donc $\mathrm{A}(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+\ln(x)$

- $c(x)=\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

$c(x)=-(-1\times\mathrm{e}^{-x})$ donc $\mathrm{C}(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

- $d(x)=1-x+x^2-x^3$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{D}(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}$

- $f(x)=2x+1$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{F}(x)=x^2+x$

- $g(x)=10x^4+6x^3-1$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{G}(x)=10\dfrac{x^5}{5}+6\dfrac{x^4}{4}-x=2x^5+\dfrac{3}{2}x^4-x$

- $h(x)=(x-1)(x+3)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

$h(x)=...=x^2+2x-3$ donc $\mathrm{H}(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x$

- $i(x)=-\dfrac{4}{3x^5}$

$i(x)=-\dfrac{4}{3}x^{-5}$ donc $\mathrm{I}(x)=-\dfrac{4}{3}\dfrac{x^{-4}}{-4}=\dfrac{x^{-4}}{3}=\dfrac{1}{3x^4}$

- $m(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{4}\right[$

m est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ donc $\mathrm{M}=-\dfrac{1}{u}$: $\mathrm{M}(x)=\dfrac{-1}{1+4x}$

- $n(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$n(x)=3\times\dfrac{2}{(2x+1)^2}$ donc n est de la forme $3\dfrac{u'}{u^2}$ donc $\mathrm{N}=3\times\dfrac{-1}{u}$: $\mathrm{N}(x)=3\times\dfrac{-1}{2x+1}=\dfrac{-3}{2x+1}$

- $q(x)=\dfrac{2}{(4-3x)^2}$ sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$

Cela ressemble presque à $\dfrac{u'}{u^2}$, on souhaiterait donc avoir $\dfrac{-3}{(4-3x)^2}$. Faisons-le apparaître :

$q(x)=\dfrac{2}{-3}\times\dfrac{-3}{(4-3x)^2}$

donc $q=\dfrac{2}{-3}\times\dfrac{u'}{u^2}$ d'où $\mathrm{Q}=\dfrac{2}{-3}\times\dfrac{-1}{u}$

donc $\mathrm{Q}(x)=\dfrac{2}{-3}\times\dfrac{-1}{4-3x}=\dfrac{2}{3(4-3x)}=\dfrac{2}{12-9x}$

- $s(x)=\dfrac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ sur $]2;3[$

$s(x)=2\times\dfrac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}$ donc s est de la forme $2\dfrac{u'}{u^2}$ donc $\mathrm{S}(x)=2\times\dfrac{-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{-2}{x^2-5x+6}$

- $z(x)=3\,\mathrm{e}^{-4x}$ sur $\mathbb{R}$

$z(x)=\dfrac{3}{-4}\times\left(-4\,\mathrm{e}^{-4x}\right)$ donc z est de la forme $\dfrac{3}{-4}u'e^u$

donc $\mathrm{Z}=\dfrac{3}{-4}\mathrm{e}^u$: $\mathrm{Z}(x)=-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-4x}$

- $b(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{B}(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x$, autrement dit une primitive de b est b

- $e(x)=x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$e(x)=\dfrac{1}{2}\times\left(2x\,\mathrm{e}^{x^2}\right)$ donc e est de la forme $\dfrac{1}{2}u'e^u$

donc $\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^u$: $\mathrm{E}(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$

- $j(x)=\mathrm{e}^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$j(x)=\dfrac{1}{-2}\times\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x+3}\right)$ donc j est de la forme $\dfrac{1}{-2}u'e^u$

donc $\mathrm{J}=\dfrac{1}{-2}\mathrm{e}^u$: $\mathrm{J}(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}$

- $k(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$k(x)=\dfrac{1}{-2}\times\left(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ donc k est de la forme $\dfrac{1}{-2}u'e^u$

donc $\mathrm{K}=\dfrac{1}{-2}\mathrm{e}^u$: $\mathrm{K}(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$

- $p(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

$\mathrm{P}(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ ← c'est du cours

V. Covid-19

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour, le nombre de malades est égal à $f(x)=16x^2-x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades sur la période de 16 jours.

Rappel de cours :

> **DÉFINITION.**
> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
> La ***valeur moyenne de la fonction f*** sur $[a;b]$ est le réel $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$

Correction détaillée en vidéo (≈ 7 min) : https://youtu.be/oVFHojz5y50

VI. Pas de vacances en Terminale : le Bac c'est (pas) de l'eau

À cette heure où j'écris, il est certain que le Bac comportera une partie de contrôle continu. Mais dans quelle proportion ? Nous le saurons dans les jours à venir.

En attendant, on continue comme habituellement : pas de repos complet pendant les vacances de Pâques ! C'est l'occasion de s'entraîner*, et en plus vous êtes confinés donc c'est un rêve éveillé que vous vivez : pas tentés par la beauté exquise des premières jupes (et des premiers débardeurs pour vous les filles ?), pas tentés d'aller dehors profiter du soleil et de ses rayons qui réchauffent le cœur, pas tentés de partager de belles photos sur insta #printemps… Bref, merci Covid-19.

* plus sérieusement, ne prenons pas de retard, on ne sait jamais, on est dans les temps si on arrête ici le chapitre sur l'intégration… Alors soyons prudents :)

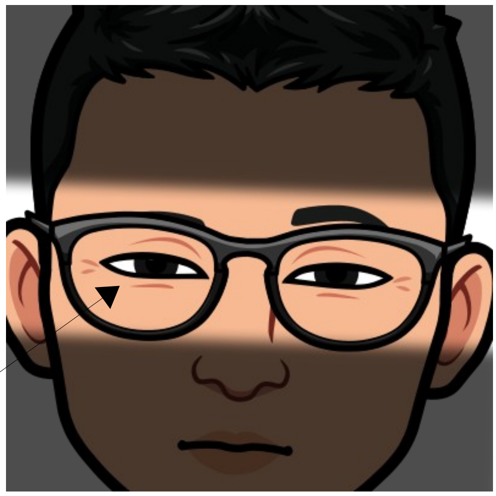
À faire during holidays : fiche d'extraits de 3 sujets de Bac (lien + lien de corrections), sur le thème des fonctions que l'on a terminé : un mélange de tout depuis le début de l'année (en fonctions). C'est beau ! ^_^

Et si vous le voulez, vous pouvez aussi vous entraîner en faisant le Bac Blanc n°2 de l'année dernière (lien).
Correction disponible sur le site, en étant connecté (lien).

À la prochaine :)

Prenez soin de vous.

J'espère revoir vos tronches assez vite.



= déconne pas, je compte sur toi

BONNES VACANCES