

I. Déterminer un vecteur normal à un plan	1
I.1 Méthode : SF7 p332	1
I.2 Méthodes en vidéo	1
I.3 Pratique : exercice 54 p346	2
II. Déterminer une équation cartésienne d'un plan	2
II.1 Méthode : SF8 p333	2
II.2 Pratique : exercice 57 p347	2
III. Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan	2
IV. Montrer que deux plans sont perpendiculaires	2
IV.1 Méthode	2
IV.2 Pratique : exercice 72 p348	2

I. Déterminer un vecteur normal à un plan

I.1 Méthode : SF7 p332

Faire l'exercice « Savoir-faire 7 » page 332. L'exercice est corrigé en détail.

I.2 Méthodes en vidéo

Puis regardez cette excellente vidéo (≈ 14 min) qui fait le point sur les méthodes pour trouver un vecteur normal à un plan :

voir cette image
en grand en
cliquant ici

Vecteur normal à un plan : Comment en trouver un ?

Connaissant une équation cartésienne du plan
Repère orthonormé $\rightarrow a x + b y + c z + d = 0$ $\vec{m} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$2x + z - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 0y + 1z - 3 = 0$ $\vec{m} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta y = 2x + 1 \Leftrightarrow -2x + y + 0z - 1 = 0$ $\vec{m} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = 0 \Leftrightarrow 1x + 0y + 0z = 0$ $\vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diagramme illustrant un repère orthonormé avec un plan et un vecteur normal \vec{m} perpendiculaire au plan.

3 points non alignés du plan A, B, C
Vérifier \vec{m} est normal à un plan \rightarrow Vérifier $\vec{AB} \cdot \vec{m} = 0$ et $\vec{AC} \cdot \vec{m} = 0$
 $\vec{m} \cdot \vec{v} = x^2 + y^2 + z^2$ Δ repère orthonormé

\vec{m} est normal (ABC)? $\vec{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AB} \cdot \vec{m} = 7 \times 5 + 16 \times (-4) + 1 \times 29 = 0$ \vec{m} normal à (ABC)
 $\vec{AC} \cdot \vec{m} = 2 \times 5 + 3 \times 16 + (-2) \times 29 = 0$

Déterminer un vecteur normal à un plan \rightarrow 3 pts non alignés du plan A, B, C
 $\vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y + z = 0$
 $\vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 2z = 0$
Choisissons $y = 16$ donc $x = 5$ donc $z = 29$ $\vec{m} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$

$\vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y + z = 0$
 $\vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 2z = 0$
 $\begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 8y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ 16x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ x = \frac{5}{16}y \end{cases}$

www.jaicompris.com 13:47 / 14:08

I.3 Pratique : exercice 54 p346

$$A(0; -1; 1) \quad B(2; 1; 2) \quad C(0; -3; 2)$$
$$\vec{AB}(2-0; 1-(-1); 2-1) \text{ ie } \vec{AB}(2; 2; 1)$$
$$\vec{AC}(0-0; -3-(-1); 2-1) \text{ ie } \vec{AC}(0; -2; 1).$$

PROPRIÉTÉ . Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On cherche un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ normal au plan (ABC) :

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ donc, puisqu'on est dans un repère orthonormé, $2a + 2b + c = 0$ et $-2b + c = 0$.

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ -2b + c = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2a + 2b + 2b = 0 \\ c = 2b \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = -2b \\ c = 2b \end{cases}.$$

On choisit alors une valeur de b , par exemple $b = 1$: $(-2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

II. Déterminer une équation cartésienne d'un plan

II.1 Méthode : SF8 p333

Faire l'exercice « Savoir-faire 8 » page 333. L'exercice est corrigé en détail.

II.2 Pratique : exercice 57 p347

a) $\vec{n}(3; 1; -2)$ est un vecteur normal du plan \mathcal{P}

donc une équation cartésienne de \mathcal{P} est $3x + y - 2z + d = 0$.

Or, $A(3; 1; 2)$ appartient à ce plan, donc $3x_A + y_A - 2z_A + d = 0$ ie $9 + 1 - 4 + d = 0$ ie $d = -6$.

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est donc $3x + y - 2z - 6 = 0$.

- b)
- $B(4; -5; -2)$ et $3x_B + y_B - 2z_B - 6 = \dots = 12 - 5 + 4 - 6 = 5$ donc $B \notin \mathcal{P}$.
 - $C(0; 4; 1)$ et $3x_C + y_C - 2z_C - 6 = \dots = 0 + 4 - 2 - 6 = -4$ donc $C \notin \mathcal{P}$.
 - $D(2; 2; 1)$ et $3x_D + y_D - 2z_D - 6 = \dots = 6 + 2 - 2 - 6 = 0$ donc $D \in \mathcal{P}$.

III. Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Faire l'exercice « Savoir-faire 9 » page 333.

L'exercice est corrigé en détail.

IV. Montrer que deux plans sont perpendiculaires

IV.1 Méthode

Faire l'exercice « Savoir-faire 11 » page 335.

L'exercice est corrigé en détail.

IV.2 Pratique : exercice 72 p348

a) D'après les équations cartésiennes :

- un vecteur normal de \mathcal{P} est $\vec{n}_1(3; 1; 2)$
- un vecteur normal de \mathcal{P}' est $\vec{n}_2(1; 5; -4)$.

Or (on est dans un repère orthonormé) : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \times 1 + 1 \times 5 + 2 \times (-4) = 0$.

Donc \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux. Par conséquent, \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont perpendiculaires.

b) Le plan \mathcal{Q} a pour vecteur normal $\vec{n}_3(1; -1; -1)$.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = \dots = 0$ et $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \dots = 0$ donc \mathcal{Q} est perpendiculaire à \mathcal{P} et \mathcal{P}' .