# L'essentiel du chapitre

## Propriétés et applications du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$

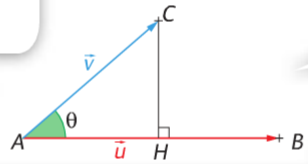
### Calculer un produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$

à l'aide **des normes et d'un angle si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls** :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$$

à l'aide des **normes** de vecteurs :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$




à l'aide d'un **projeté orthogonal** :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB\times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB\times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

à l'aide des **coordonnées dans un repère orthonormé** :

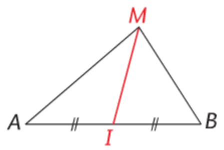
$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

### Calculer des longueurs ou des angles dans un triangle

**Calcul de la norme à l'aide des coordonnées**

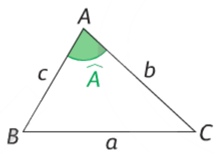
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Théorème de la médiane**




$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2$$

**Théorème d'Al-Kashi**




$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

### Trigonométrie

**Formules d'addition**

pour tous réels $a$ et $b$,

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

**Formules de duplication**

pour tout réel $a$,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

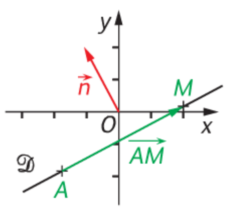
## Orthogonalité et applications

### Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

### Équations de droites

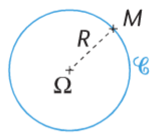
- La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- La droite $\mathscr{D}$ passant par un point $A$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est caractérisée par :




$$M(x\,;y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

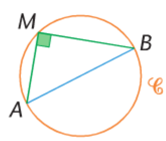
### Équations de cercles

- **Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$** est caractérisé par :




$$M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega M^2 = R^2}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2}$$

- **Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$** est caractérisé par :




$$M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0}$$

Source : Maths Déclic (2015), 1re S, éd. Hachette