T°S — SÉANCE DU LUNDI 30 MARS 2020

Tout d'abord, veuillez m'excuser… Lors de la dernière séance, je vous ai proposé d'apprendre (au I. II. et III.) à « déterminer un vecteur normal à un plan », « déterminer une équation cartésienne de plan » et « montrer que deux plans sont perpendiculaires ». Or, ces notions sont dans le chapitre sur le produit scalaire… que nous n'avons pas encore fait ! Je m'en aperçois tardivement, j'étais sans doute fatigué en préparant cette séance. Comme vous vous en doutez, je me suis fouetté ardemment pour me faire pardonner et j'implore votre clémence, tout étonné que personne n'ait envoyé de mail pour râler.

Si vous n'avez pas compris grand-chose (même si ce n'est pas très compliqué), c'est donc normal !

I. Montrer que trois vecteurs sont coplanaires (2 méthodes)

ABCDEFGH est un cube. Les points I et J vérifient $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. <u>Méthode vectorielle</u>

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

Conclure.

2. <u>Méthode analytique</u>

Le plan est rapporté au repère (G ; C, H, F).

Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

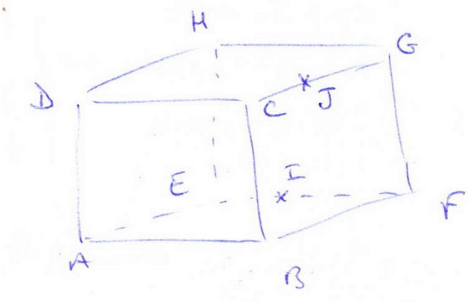
Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

<u>Correction</u> :

1. $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas colinéaires (car sinon E ∈ (FGC)… impossible puisqu'on est dans un cube)

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EJ}$ d'après la relation de Chasles

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GJ}$ d'après l'énoncé et la relation de Chasles



$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{FG}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})+\overrightarrow{FG}$ car ABCDEFGH est un cube

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FG}$

$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{FG}$ d'après la relation de Chasles

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FG}$ car $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{FG}$ (cube)

donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

PROPRIÉTÉ. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

2. Dans le repère (G ; C, H, F) :

$G(0;0;0)$ $C(1;0;0)$ $H(0;1;0)$ $F(0;0;1)$ $E(0;1;1)$ $I\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ $J\left(\frac{2}{3};0;0\right)$

On va utiliser la formule générale $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$:

$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{2}{3}-0;0-\frac{2}{3};0-1\right)$ *ie* $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$.

De même (à détailler), $\overrightarrow{EC}\ (1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{FG}\ (0;0;-1)$.

Il est « évident » qu'alors $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$ et donc que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

<u>Méthode générale pour trouver les coefficients si ce n'est pas évident</u> :

On **cherche** deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{IJ}=\lambda\overrightarrow{EC}+\mu\overrightarrow{FG}$.

Alors : $\begin{cases}\frac{2}{3} = \lambda \\ -\frac{2}{3} = -\lambda \\ -1 = -\lambda-\mu\end{cases}$ donc $\begin{cases}\lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = -\lambda+1\end{cases}$ donc $\begin{cases}\lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = \frac{1}{3}\end{cases}$.

On **vérifie** alors que $\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$ est bien égal à $\overrightarrow{IJ}$:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}\left(\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0;\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times0;\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times(-1)\right)\ ie\ \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$$

donc on a bien $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.

II. Position relative de deux droites

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note d_1 la droite passant par les points $A(1;-2;-1)$ et $B(3;-5;-2)$.

1) Démontrer qu'une représentation paramétrique de d_1 est : $\begin{cases}x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

2) d_2 est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=2-s \\ y=-1+2s \\ z=-s\end{cases}\quad s\in\mathbb{R}$

Démontrer que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.

Correction :

1. $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ (facile à montrer → à faire)

$M(x;y;z)\in d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x-1 & = & t\times 2 \\ y-(-2) & = & t\times(-3) \\ z-(-1) & = & t\times(-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x & = & 2t+1 \\ y & = & -3t-2 \\ z & = & -t-1 \end{cases}$$

Donc une représentation paramétrique de d_1 est $\begin{cases} x & = & 2t+1 \\ y & = & -3t-2 \\ z & = & -t-1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

2. Un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$, et un vecteur directeur de d_2 est $(-1;2;-1)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{-3}$.

Donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles : d_1 et d_2 sont non coplanaires ou sécantes.

Or : $\begin{cases} 1+2t & = & 2-s \\ -2-3t & = & -1+2s \\ -1-t & = & -s \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$ (à faire) $\Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 0 \\ s & = & -\frac{1}{2} \\ s & = & 1 \end{cases}$.

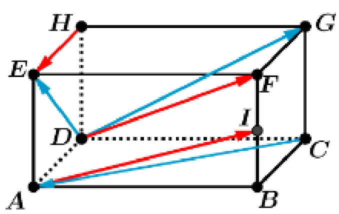
Ceci est impossible, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes : d_1 et d_2 sont non coplanaires.

III. Vecteurs coplanaires ?

ABCDEFGH est un pavé droit. I est le milieu de [BF].

1) les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

2) les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires? Justifier.



Correction détaillée en vidéo (≈ 13 min) : https://youtu.be/DiLrpkQlFrw

IV. Représentation paramétrique d'un plan, etc.

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) Justifier que les points A(1;2;-1), B(4;0;1), C(2;1;1) définissent un plan.

2) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

3) Le point M(5;-4;2) appartient-il au plan (ABC)? Justifier.

Correction détaillée en vidéo (≈ 10 min) : https://youtu.be/_bs12PU0-zs

V. Exercice Bac : Métropole, 22 juin 2015, exercice 2

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1 + 0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Correction :

1) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-0\\-1-(-1)\\5-5\end{pmatrix}$ ie $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$. Donc $\vec{AB} = 2\,\vec{OI}$.

Donc (AB) // (OI).

b) $x_C = x_D = 11$ donc (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$. (parallèle à OJK)

c) [Remarque : (AB) // (OI), avec (OI) orthogonale à $\mathscr{P}$, donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$].

- $E \in \mathscr{P}$ car $x_E = 11$.
- $\vec{AE}\begin{pmatrix}11-0\\-1+1\\5-5\end{pmatrix}$ ie $\vec{AE}\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} = \frac{2}{11}\vec{AE}$

donc $E \in (AB)$.

Donc (AB) coupe $\mathscr{P}$ en E(11 ; −1 ; 5).

d) Une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x - x_A = 2t \\ y - y_A = 0 \\ z - z_A = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une repés. param. de (CD) est :

$$\begin{cases} x - x_C = t' x_{\overrightarrow{CD}} \\ y - y_C = t' y_{\overrightarrow{CD}} \\ z - z_C = t' z_{\overrightarrow{CD}} \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} x - 11 = t'(11-11) \\ y = t'(4-0) \\ z - 1 = t'(4-1) \end{cases}$$

$$\text{ie} \quad \begin{cases} x = 11 \\ y = 4t' \\ z = 3t' + 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

"Le système d'intersection" : $\begin{cases} 2t = 11 \\ -1 = 4t' \\ 5 = 3t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{2} \\ t' = -\frac{1}{4} \\ 5 = -\frac{3}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{2} \\ t' = -\frac{1}{4} \\ 4 = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Or $4 \neq -\frac{3}{4}$ donc (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. a) $\overrightarrow{M_tN_t} \begin{pmatrix} 11 - t \\ 0,8t + 1 \\ 0,6t - 4 \end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2$

$= 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16$

$= 2t^2 - 25,2t + 138.$

b) La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, puisque $M_tN_t \geqslant 0$, alors cette distance est minimale quand son carré est minimal.

Soit $f : t \mapsto 2t^2 - 25,2t + 138$.

f est une fonction polynôme de degré 2, qui admet un minimum en $t = \frac{25,2}{2 \times 2} = 6,3$

Donc M_tN_t est minimale pour $t = 6,3$ s.